

结构力学实用教程

主　编　常伏德　王晓天



· 导入案例中引入工程实例，增加学习目的性和趣味性
· 贯穿分析研究力学问题的科学方法及力学原理的应用
· 习题类型多样、数量丰富，兼顾注册结构工程师考试





北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

说　明

本书电子版仅提供给高校任课教师使用，如有任课教师需要全本教材浏览或需要本书课件等相关教学资料，请联系北京大学出版社客服，微信手机同号：15600139606，扫下面二维码可直接联系。

由于教材版权所限，仅限任课教师索取，谢谢！



第9章 位　移　法

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
位移法计算结构的内力、绘制内力图	掌握	等截面直杆的形常数和载常数
	掌握	位移法的基本未知量和基本结构
	掌握	位移法的典型方程
	熟悉	对称性的利用

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
等截面直杆的形常数和载常数	掌握	位移法、力矩分配法的基础
位移法基本未知量	掌握	建立基本结构
位移法方程的应用	掌握	计算内力、绘制内力图
对称性的利用	熟悉	简化计算



导入案例

不适宜用力法计算的超静定结构

19世纪末，随着钢结构和钢筋混凝土结构的问世，出现了大量的高次超静定刚架，如果用力法计算将会非常麻烦。因为，力法典型方程中的未知量数目与超静定结构的超静定次数有关，若取静定结构为基本结构时，力法典型方程中的未知量数目就与结构的超静定次数相同。对于图9.1所示结构，其超静定次数为10，其力法方程式中的未知量数目也是10个，显然，这将无法快速进行手工计算。所以，力法不适宜求解高次超静定结构。

因此，科学家们经过不断的努力，在已经有了用力法求解出的单跨超静定梁的基础上，建立了单个杆件(单跨超静定梁)与多个杆件组成的结构之间的关系。这就是本章要讨论的求解超静定结构的另一种主要的基本方法——位移法，从位移法出发，图9.1所示结构的基本未知量将只有一个。

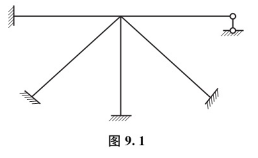


图9.1

9.1 位移法的概念

结构在一定的外因作用下，其内力与位移之间具有确定的关系。先确定结点位移，再据此推求内力，便是位移法的基本思想。位移法是以某些结点位移作为基本未知量的。

现以图 9.2(a)所示刚架为例，分析说明位移法的基本概念。结构在荷载作用下将发生虚线所示的变形，在刚结点 B 处，两杆的杆端发生相同的转角 Z_1（为使表达式具有一般性，将角位移和线位移统一用 Z 表示），若略去轴向变形，则可认为两杆长度不变，因而结点 B 没有线位移。这样，对于 BC 杆，可以把它看作一端固定、一端铰支的单跨梁，内力和变形是两种作用的叠加，即均布荷载 q 的作用与固定端 B 发生转角 Z_1，如图 9.2(b)所示。而这两种情况下的内力通过力法都可以计算。同理，BA 杆看作两端固定的单跨梁，内力和变形由转角 Z_1产生，如图 9.2(c)所示。问题的关键在于需首先确定转角 Z_1，可见此方法计算结构时，应以结点 B 的角位移 Z_1 为基本未知量，如果设法首先求出 Z_1，则各杆的内力随之均可确定。这就是位移法的基本思路。

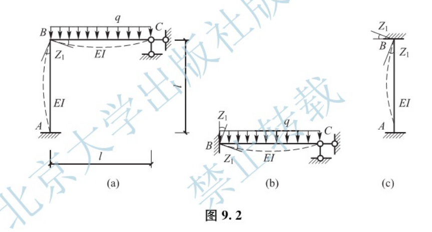


图 9.2

经过以上分析，在位移法中需要解决以下的问题。

(1) 用力法算出单跨超静定梁在杆端发生各种位移时以及荷载等因素作用下的内力。

(2) 确定以结构上的哪些位移作为基本未知量。

(3) 如何求出这些位移。

下面依次讨论这些问题。

9.2 等截面直杆的形常数和载常数

用位移法计算超静定刚架时，每根杆件均可看作单跨超静定梁。在计算过程中，要用到这种梁在杆端发生转动或移动时，以及荷载等外因作用下的杆端弯矩和剪力。为了以后应用方便，根据力法的计算结果给出等截面直杆单跨超静定梁的杆端弯矩和剪力的值。

杆端弯矩和杆端剪力是作用在杆端上的弯矩和剪力。为了应用方便，杆端弯矩和剪力

的正负号规定如下：杆端弯矩是以对杆端顺时针方向为正(对结点或支座则以反时针方向为正)，反之为负；杆端剪力正负号的规定与通常规定相同，即以使杆端微段顺时针转动为正，反之为负。

杆端位移正负号规定如下：杆端转角以顺时针为正，反之为负；杆端线位移以使整个杆件顺时针转动为正，反之为负。图 9.3 中所示的杆端力及杆端位移均为正值。

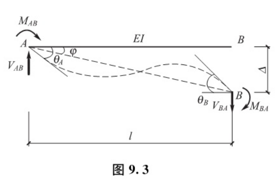


图 9.3

1. 荷载引起的载常数(固端弯矩和固端剪力)

单跨梁由荷载引起的杆端弯矩和杆端剪力称为载常数或固端弯矩和固端剪力，为了与实际杆端弯矩和剪力相区别，以符号 M_{ij}^{F} 和 V_{ij}^{F} 表示。固端弯矩和固端剪力均可用力法算得，对于通常的三种单跨超静定梁，即两端固定的梁、一端固定另一端铰支的梁、一端固定另一端定向滑动支座的梁，在常见荷载作用下的固端弯矩和固端剪力见表 9-1。

表 9-1 等截面直杆的载常数

编号		简图	弯矩		剪力	
			M_{AB}^{F}	M_{BA}^{F}	V_{AB}^{F}	V_{BA}^{F}
两端固定	1	P；A，B；EI；$\frac{l}{2}$，$\frac{l}{2}$	$-\frac{Pl}{8}$	$+\frac{Pl}{8}$	$+\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$
	2	P；A，B；EI；a，b；l	$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$+\frac{Pa^2b}{l^2}$	$\frac{Pb^2}{l^2}\left(1+\frac{2a}{l}\right)$	$-\frac{Pa^2}{l^2}\left(1+\frac{2b}{l}\right)$
	3	q；A，B；EI；l	$-\frac{1}{12}ql^2$	$+\frac{1}{12}ql^2$	$+\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
	4	q；A，B；EI；l	$-\frac{1}{30}ql^2$	$+\frac{1}{20}ql^2$	$+\frac{3}{20}ql$	$-\frac{7}{20}ql$
	5	A，B；t_1；t_2 EI；l；$\Delta t=t_1-t_2$	$\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	0	0

（续）

编号		简图	弯矩		剪力	
			M_{AB}^F	M_{BA}^F	V_{AB}^F	V_{BA}^F
一端固定一端铰支	6		$-\frac{3}{16}Pl$	0	$+\frac{11}{16}P$	$-\frac{5}{16}P$
	7		$-\frac{Pb(l^2-b^2)}{2l^2}$	0	$+\frac{Pb(3l^2-b^2)}{2l^3}$	$-\frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3}$
	8		$-\frac{1}{8}ql^2$	0	$+\frac{5}{8}ql$	$-\frac{3}{8}ql$
	9		$-\frac{1}{15}ql^2$	0	$+\frac{2}{5}ql$	$-\frac{1}{10}ql$
	10		$-\frac{7}{120}ql^2$	0	$+\frac{9}{40}ql$	$-\frac{11}{40}ql$
	11	$\Delta t=t_1-t_2$	$\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$	0	$-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$	$-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$
一端固定一端滑动	12		$-\frac{1}{2}ql$	$-\frac{1}{2}ql$	$+P$	$B_{左}=+P$ $B_{右}=0$
	13		$-\frac{Pa}{2l}(2l-a)$	$-\frac{Pa^2}{2l}$	$+P$	0
	14		$-\frac{1}{3}ql^2$	$-\frac{1}{6}ql^2$	$+ql$	0

（续）

编号		简图	弯矩		剪力	
			M^F_{AB}	M^F_{BA}	V^F_{AB}	V^F_{BA}
一端固定 一端滑动	15		$-\frac{1}{8}ql^2$	$-\frac{1}{24}ql^2$	$+\frac{1}{2}ql$	0
	16		$-\frac{5}{24}ql^2$	$-\frac{1}{8}ql^2$	$+\frac{1}{2}ql$	0
	17	$\Delta t=t_1-t_2$	$\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	0	0

表9-1中最常用到的是1、3、6、8、12、14等几种情况。建议读者将它们的弯矩图画出来，并能熟练应用。

2. 等截面直杆的形常数

常见单跨超静定梁由杆端发生单位转角或单位线位移时引起的杆端弯矩和杆端剪力称为形常数，也亦可用力法算得，见表9-2，应熟练掌握并应用。

其中 $i=\frac{EI}{l}$，称为杆 AB 的线刚度。由形常数的数值可见杆件刚度越大，杆端位移时产生的杆端力就越大。

表9-2 等截面直杆的形常数

编号		简图	弯矩		剪力	
			$\overline{M}_{AB}$	$\overline{M}_{BA}$	$\overline{V}_{AB}$	$\overline{V}_{BA}$
两端固定	1	$\theta_A=1$	$4i$	$2i$	$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{6i}{l}$
	2	$\Delta=1$	$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{6i}{l}$	$\frac{12i}{l^2}$	$\frac{12i}{l^2}$

（续）

编号		简图	弯矩		剪力	
			$\overline{M}_{AB}$	$\overline{M}_{BA}$	$\overline{V}_{AB}$	$\overline{V}_{BA}$
一端固定一端铰支	3	$\theta_A=1$ A B EI l	$3i$	0	$-\frac{3i}{l}$	$-\frac{3i}{l}$
	4	A B EI $\Delta=1$ l	$-\frac{3i}{l}$	0	$\frac{3i}{l^2}$	$\frac{3i}{l^2}$
一端固定一端定向	5	$\theta_A=1$ A B EI l	i	$-i$	0	0

9.3 位移法的基本未知量和基本结构

1. 位移法的基本未知量

在单跨梁形常数和载常数的基础上，如果结构上每根杆件两端的角位移和线位移都已求得，则全部杆件的内力均可通过叠加确定。因此，在位移法中，基本未知量应是各结点的角位移和线位移。在计算时，应首先确定独立的结点角位移和线位移的个数。

1）确定独立的结点角位移个数

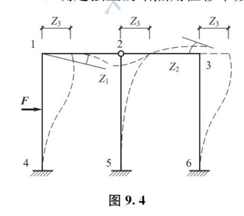


图 9.4

由于在同一刚结点处，各杆端的转角都是相等的，因此每一个刚结点具有一个独立的角位移未知量。在固定支座处，其转角等于零或是已知的支座位移值。至于铰结点或铰支座处各杆端的转角，由 9.2 节可知，它们不是独立的，确定杆件内力时可以不需要它们的数值，故可不作为基本未知量。这样，确定结构独立的结点角位移数时，只要看刚结点的数目即可。例如图 9.4 所示刚架，其独立的结点角位移数目为 2，即 Z_1、Z_2。

2）确定独立的结点线位移个数

在一般情况下，每个结点均可能有水平和竖向两个独立的线位移。但确定独立的结点线位移数目时，通常对于受弯杆件略去其轴向变形，并设弯曲变形也是微小的，于是可以认为受弯直杆两端之间的距离在变形后仍保持不变，这样每一受弯直杆就相当于一个约束，从而减少了独立的结点线位移数目。例如，在图 9.4 所示的刚架中，4、5、6 三个固定端都是不动的点，三根柱子的长度又保持不变，因而结点 1、2、3 均无竖向位移。又由

于两根横梁亦保持长度不变，故三个结点均有相同的水平位移。因此，在位移法计算时，只有一个独立的结点线位移，即 Z_3。

独立的结点线位移数目还可以用下述方法来确定：由于在刚架计算中，不考虑各杆长度的改变，因而结点独立线位移的数目可用几何组成分析的方法来判定。如果把所有的刚结点(包括固定支座)都改为铰结点，则此铰结体系的自由度个数就是原结构的独立结点线位移的数目。换句话说，为了使铰结体系成为几何不变体系而增加的链杆数就等于原结构的独立结点线位移的数目。

以图 9.5(a)所示刚架为例，为确定独立结点线位移的数目，可把所有刚结点(包括固定支座)都改为铰结点，得到图 9.5(b)实线所示的铰结杆件体系，该体系必须添加两根链杆(虚线所示)后，才能由几何可变体系成为几何不变体系。由此可知，原刚架用位移法计算时有两个独立结点线位移。

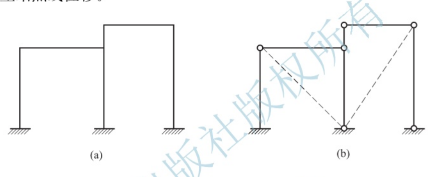


图 9.5

需要注意的是，上述确定独立的结点线位移数目的方法，是以受弯直杆变形后两端距离不变的假设为依据的。对于需要考虑轴向变形的链杆或对于受弯的曲杆，则其两端距离不能看作不变。因此，图 9.6(a)、(b)所示结构，其独立的结点线位移数目应是 2 而不是 1。

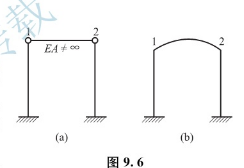


图 9.6

一般来说，用位移法计算刚架时，基本未知量包括结点角位移和独立结点线位移。结点角位移的数目等于结构刚结点的数目；独立结点线位移的数目等于将刚结点改为铰结点后得到的铰结体系的自由度数目。

在确定基本未知量时，由于既保证了刚结点各杆杆端转角彼此相等，又保证了各杆杆端距离保持不变，因此，将分解的杆件再综合为结构的过程能够保证各杆杆端位移彼此协调，能够满足变形连续条件。

2. 位移法的基本结构和基本体系

图 9.7(a)所示刚架中，只有一个刚结点 D，所以只有一个结点角位移 Z_1，没有结点线位移。在结点 D 处加一个控制结点 D 转动的约束，将其称作附加刚臂，用加斜线的三角符号表示(注意，这种约束不约束结点线位移)，这样得到的无结点位移的结构称为原结构的基本结构，如图 9.7(c)所示。把基本结构在荷载和基本未知位移共同作用下的体系称为原结构的基本体系，如图 9.7(b)所示。由此可知，位移法的基本体系是通过增加约束将基本未知量完全锁住后，在荷载和基本未知量位移的共同作用下的超静定杆的综合体。

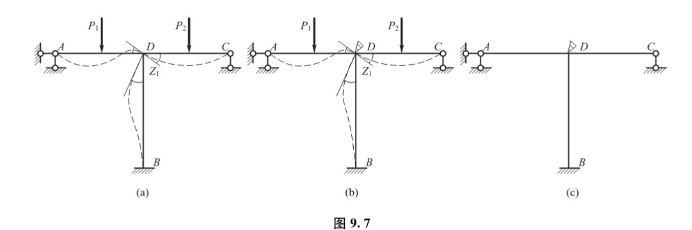


图 9.7

同理，图 9.8(a)所示结构，有两个基本未知量，结点 C 的角位移 Z_1、结点 C 和 D 的线位移 Z_2(独立结点线位移只有一个)。在结点 C 处加一控制其转动的约束，即附加刚臂，在结点 D 处附加一水平链杆，控制结点 C 和 D 的线位移。其基本体系和基本结构分别如图 9.8(b)、(c)所示。

由以上讨论可知，在原结构基本未知量处，增加相应的约束，再产生与原结构相同的结点位移，就得到原结构的基本体系。对于结点角位移，增加控制转动的附加刚臂；对于结点线位移，则增加控制结点线位移的附加链杆，这两种约束的作用是相互独立的。因此，基本体系与原结构的区别在于，增加了人为的约束，把原结构变为一个被约束的单杆综合体，分解成荷载和基本未知位移分别作用下的叠加，9.4 节将讨论如何利用基本体系这一工具来建立位移法的基本方程。

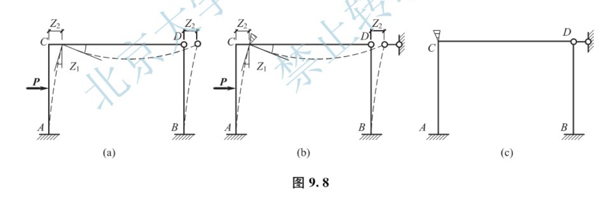


图 9.8

9.4 位移法方程及算例

根据位移法的基本体系在荷载与结点位移的共同作用下，与原结构等价的条件，列出的平衡方程称为位移法方程。

1. 位移法方程的建立

现以图 9.9(a)所示刚架说明位移法方程是如何建立的。该刚架只有一个刚结点 C，基本未知量即是 C 点的角位移 Z_1。在结点 C 处施加控制转动的约束附加刚臂，得到基本体系如图 9.9(b)所示。

基本体系转化为原结构的条件就是附加刚臂的约束力矩 R_1[图 9.9(b)]应等于零，即

$$R_1=0 \tag{a}$$

因为在原结构中结点 C 处没有约束，所以基本结构在荷载和 Z_1 共同作用下，在结点 C 处应与原结构完全相同，只有这样，图 9.9(b)的内力和变形才能与原结构的内力和变形完全相同，这就是基本体系转化为原结构的条件。以此列出的方程是一个平衡方程，即为位移法方程。为方便起见，此处用符号↷表示转角位移，以后以此沿用。

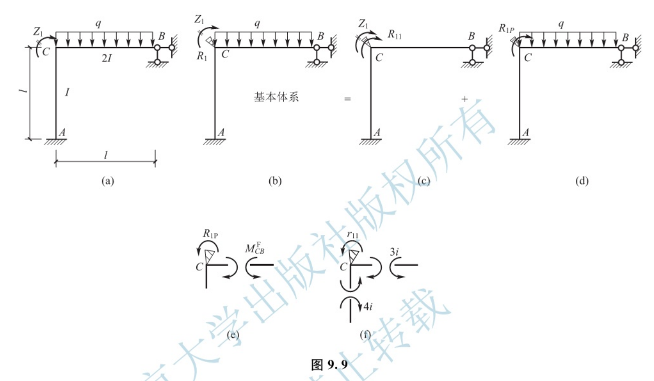


图 9.9

先分析基本结构在荷载作用下的计算［图 9.9(d)］。此时结点 C 处于锁住状态，由单跨梁载常数求 CB 杆的固端弯矩 M_{CB}^{F}，$M_{CB}^{F}=-\dfrac{ql^2}{8}$。由结点平衡［图 9.9(e)］可计算出在附加刚臂中存在的约束力矩 R_{1P}，$R_{1P}=-\dfrac{ql^2}{8}$。

再来分析基本结构在基本未知量 Z_1 作用下的计算过程［图 9.9(c)］。此时基本结构中结点 C 发生角位移 Z_1，由单跨梁形常数分别求 CB 杆、AC 杆的杆端弯矩为 $M'_{CB}=3iZ_1$、$M'_{CA}=4iZ_1$，由结点平衡［图 9.9(f)］可计算在附加刚臂中存在的约束力矩 R_{11}，$R_{11}=3iZ_1+4iZ_1=7iZ_1$。

将以上两种情形叠加，使基本体系恢复到原结构的状态，即使基本体系在荷载和 Z_1 作用下附加刚臂的约束力矩 R_1 消失。这时图 9.9(b)中，虽然结点 C 在形式上还有附加转动约束，但实际上已不起作用，即结点 C 已处于放松状态。

根据以上分析，利用叠加原理，式(a)可写为

$$R_1=R_{1P}+R_{11}=0 \tag{b}$$

进一步将 R_{11} 表示为与 Z_1 有关的量，式(b)可写为

$$R_1=r_{11}Z_1+R_{1P}=0 \tag{9-1}$$

式中，r_{11} 为基本结构在单位位移 $Z_1=1$ 单独作用时在附加刚臂中的约束力矩；R_{1P} 为基本结构在荷载单独作用下在附加刚臂中的约束力矩。

式(9－1)就是求解基本未知量 Z_1 的位移法方程，此方程是平衡方程。将 r_{11}、R_{1P} 的数值代入式(9－1)，便可计算出 $Z_1=-\frac{R_{1P}}{r_{11}}=-\frac{-\frac{ql^2}{8}}{7i}=\frac{ql^2}{56i}$，将 Z_1 代回图 9.9(d)，所得的结果再叠加上图 9.9(d)的结果，即得到图 9.9(a)所示结构的解。

总之，对于一个刚结点，有一个基本未知量结点角位移，相应可以写出一个平衡方程——位移法的基本方程。一个基本方程正好解出一个基本未知量。

从以上分析过程，可得位移法要点如下。

(1) 确定位移法的基本未知量，取出基本体系［图 9.9(b)］。

(2) 建立位移法的基本方程。位移法的基本方程是平衡方程：先将结点位移锁住，求各超静定杆在荷载作用下的结果；再求各超静定杆在结点位移作用下的结果。最后叠加以上两步结果，使外加约束中的约束力等于零，即得位移法的基本方程。

(3) 求解位移法方程，得到基本未知量。

(4) 求出各杆内力。

这就是位移法的基本思路和解题过程。

2. 位移法的典型方程

对于具有多个基本未知量的结构，仍然应用上述思路建立位移法的典型方程。

图 9.10(a)所示刚架有两个基本未知量：结点 C 的独立转角位移 Z_1 和独立的结点线位移 Z_2。这种结构称为有侧移结构。在结点 C 处加一限制转动的约束——附加刚臂，为约束 1，在结点 D 处加一限制水平线位移的约束——链杆，为约束 2。令附加刚臂发生与原结构相同的转角 Z_1，同时令附加链杆发生与原结构相同的线位移 Z_2，便得基本体系，如图 9.10(b)所示。下面利用叠加原理建立位移法方程。

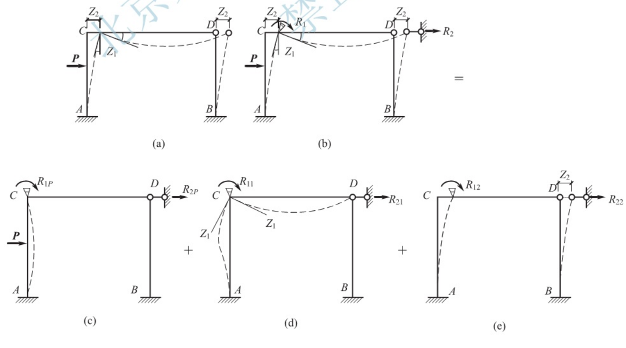


图 9.10

(1) 基本结构在荷载单独作用时的计算，如图 9.10(c)所示。先求出各杆的固端力，然后利用平衡条件计算附加刚臂与附加链杆中存在的约束力矩 R_{1P} 和水平约束力 R_{2P}。

(2) 基本结构在 Z_1 单独作用时的计算，如图 9.10(d)所示。使基本结构在结点 C 发生结点位移 Z_1，但结点 D 仍被锁住。先求出基本结构在杆件 AC 和 CD 的杆端力，再利用平衡条件计算在附加刚臂与附加链杆中分别存在的约束力矩 R_{11} 和水平约束力 R_{21}。

(3) 基本结构在 Z_2 单独作用时的计算，如图 9.10(e)所示。使基本结构在结点 D 发生结点位移 Z_2，但结点 C 仍被锁住。先求出基本结构在杆件 DB 和 CA 的杆端力，再利用平衡条件计算在附加刚臂与附加链杆中分别存在的约束力矩 R_{12} 和水平约束力 R_{22}。

将以上三个过程在附加约束中的力叠加，得基本体系在荷载和结点位移 Z_1、Z_2 共同作用下的结果。这时基本体系已转化为原结构，虽然在形式上还有约束，但实际上已不起作用，即附加约束中的总约束力应等于零，即：

$$\left.\begin{aligned} R_1=0 \\ R_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

则

$$\left.\begin{aligned} R_{11}+R_{12}+R_{1P}=0 \\ R_{21}+R_{22}+R_{2P}=0 \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

式中，R_{1P}、R_{2P} 为基本结构在荷载单独作用时，在附加约束 1 和 2 中产生的约束力矩和约束力；R_{11}、R_{21} 为基本结构在结点位移 Z_1 单独作用($Z_2=0$)时，在附加约束 1 和 2 中产生的约束力矩和约束力；R_{12}、R_{22} 为基本结构在结点位移 Z_2 单独作用($Z_1=0$)时，在附加约束 1 和 2 中产生的约束力矩和约束力。

进一步将 R_{11}、R_{21}、R_{12}、R_{22} 表示为与 Z_1 和 Z_2 有关的量，式(b)可写为

$$\left.\begin{aligned} r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+R_{1P}=0 \\ r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+R_{2P}=0 \end{aligned}\right\} \tag{9-2}$$

式中，r_{11}、r_{21} 为基本结构在结点位移 $Z_1=1$ 单独作用($Z_2=0$)时，在附加约束 1 和 2 中产生的约束力矩和约束力；r_{12}、r_{22} 为基本结构在结点位移 $Z_2=1$ 单独作用($Z_1=0$)时，在附加约束 1 和 2 中产生的约束力矩和约束力。

式(9-2)就是求解两个基本未知量 Z_1、Z_2 的位移法方程。

对于具有 n 个基本未知量的结构，其位移法方程的典型形式如下：

$$\left.\begin{aligned} r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+\cdots+r_{1n}Z_n+R_{1P}=0 \\ r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+\cdots+r_{2n}Z_n+R_{2P}=0 \\ \cdots\cdots \\ r_{n1}Z_1+r_{n2}Z_2+\cdots+r_{nn}Z_n+R_{nP}=0 \end{aligned}\right\} \tag{9-3}$$

式中，r_{ii} 为基本结构在结点位移 $Z_i=1$ 单独作用(其他位移均为零)时，在附加约束 i 中产生的约束力($i=1$、2、…、n)；r_{ij} 为基本结构在结点位移 $Z_j=1$ 单独作用(其他位移均为零)时，在附加约束 i 中产生的约束力($i=1$、2、…、n，$j=1$、2、…、n，$i\neq j$)；R_{iP} 为基本结构在荷载单独作用(所有基本未知量位移均为零)时，在附加约束 i 中产生的约束力

(i=1、2、…、n)。

式(9-3)中的每一方程表示基本体系与每一未知量相应的附加约束处约束力等于零的平衡条件。具有 n 个基本未知量的结构，基本体系就有 n 个附加约束，也就有 n 个附加约束处的平衡条件，即 n 个平衡方程。显然，可由 n 个平衡方程解出 n 个基本未知量。

在建立位移法方程时，基本未知量 Z_1、Z_2、…、Z_n 均假设为正号，即假设结点角位移为顺时针转向，结点线位移使杆产生顺时针转动。计算结果为正时，说明实际位移的方向与所设方向一致；计算结果为负时，说明实际位移的方向与所设方向相反。

式(9-3)中处于主对角线上的系数 r_{ii} 称为主系数，其值恒大于零；处于主对角线两侧的 k_{ij} 等称为副系数，其值可大于零，可小于零，或等于零。R_{iP} 称为自由项。由反力互等定理可知：

$$r_{ij}=r_{ji} \tag{9-4}$$

由此可减少副系数的计算工作量。

由于在位移法典型方程中，每个系数都是单位位移所引起的附加联系的反力(或反力矩)。显然，结构的刚度愈大，这些反力(或反力矩)的数值也愈大，故这些系数又称为结构的刚度系数，位移法典型方程又称为结构的刚度方程，位移法也称为刚度法。

3. 位移法算例

1) 位移法计算连续梁和无侧移刚架

现通过例题说明用位移法计算连续梁和无侧移刚架的过程。

【例 9-1】 用位移法计算图 9.11(a)所示连续梁的内力。EI=常数

解：(1) 确定位移法的基本未知量，n=1，为结点 B 的转角位移；形成基本体系，如图 9.11(b)所示。

(2) 建立位移法的基本方程。

$$r_{11}Z_1+R_{1P}=0$$

(3) 计算主系数 r_{11}、自由项 R_{1P}。r_{11} 是基本结构在 B 点转角 $Z_1=1$ 单独作用时，在附加刚臂中的约束力矩。设 $i=\dfrac{EI}{l}$，利用形常数计算各杆端弯矩，并作 $\overline{M}$ 图，如图 9.11(c)所示。

$$\overline{M}_{BC}=3i,\quad \overline{M}_{BA}=4i,\quad \overline{M}_{AB}=2i$$

由结点 B 的力矩平衡如图 9.11(d) 所示，可得

$$\sum M_B=0,\ r_{11}=7i$$

R_{1P} 为基本结构在荷载单独作用下在附加刚臂中的约束力矩。利用载常数计算各杆固端弯矩，并作 M_P 图，如图 9.11(e) 所示。

$$M_{BA}^{F}=-M_{AB}^{F}=\frac{ql^2}{12}=\frac{2\times 6^2}{12}=6\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^{F}=-\frac{3Pl}{16}=\frac{3\times 16\times 6}{16}=-18\text{kN}\cdot\text{m}$$

由结点 B 的力矩平衡如图 9.11(f) 所示，可得

$$\sum M_B=0,\quad R_{1P}=-18+6=-12\text{kN}\cdot\text{m}$$

(4) 求解位移法方程，得到基本未知量 Z_1。

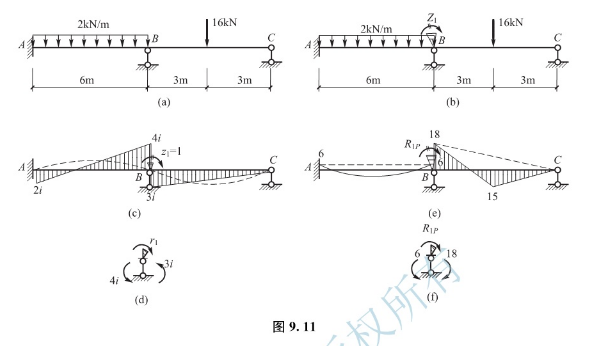


图 9.11

$$Z_1=-\frac{R_{1P}}{r_{11}}=\frac{12}{7i}=1.714\,\frac{1}{i}$$

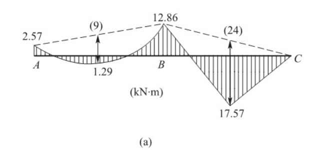
（5）利用叠加原理作 M 图。$M=\overline{M}Z_1+M_P$。

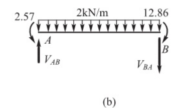
$$M_{AB}=2iZ_1+M_{AB}^{\mathrm{F}}=2i\left(1.714\,\frac{1}{i}\right)-6=-2.57\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{BA}=4iZ_1+M_{BA}^{\mathrm{F}}=4i\left(1.714\,\frac{1}{i}\right)+6=12.86\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{BC}=3iZ_1+M_{BC}^{\mathrm{F}}=3i\left(1.714\,\frac{1}{i}\right)-18=-12.86\mathrm{kN\cdot m}$$

杆端弯矩纵坐标仍画在受拉侧，根据杆端弯矩，利用区段叠加法，即可画出 M 图，如图 9.12(a)所示。





(c)

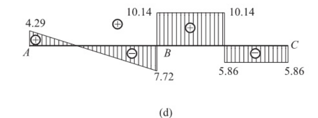


图 9.12

(6) 作 V 图。利用已画出的 M 图，根据杆段转动平衡，计算杆端剪力。

由杆 AB 的隔离体［图 9.12(b)］得

$$\sum M_B=0,\quad V_{AB}=\frac{-12.86+2\times6\times3+2.57}{6}=4.29\text{kN}$$

$$\sum M_A=0,\quad V_{BA}=\frac{-12.86-2\times6\times3+2.57}{6}=-7.72\text{kN}$$

由杆 BC 的隔离体［图 9.12(c)］得

$$\sum M_B=0,\quad V_{CB}=\frac{-16\times3+12.86}{6}=-5.86\text{kN}$$

$$\sum M_C=0,\quad V_{BC}=\frac{16\times3+12.86}{6}=10.14\text{kN}$$

V 图如图 9.12(d)所示。

(7) 校核。结点 B 满足力矩平衡：

$$\sum M_B=12.86-12.86=0$$

连续梁整体满足竖向合外力为零：

$$\sum Y=4.29+17.86+5.86-2\times6-16\approx0$$

【例 9-2】 试用位移法计算图 9.13(a)所示刚架，绘制其弯矩图。各杆相对线刚度 i 值如图所示。

解：(1) 确定位移法基本未知量，分别为 1、2 结点的角位移 Z_1、Z_2，$n=2$。形成基本体系，如图 9.13(b)所示。

(2) 建立位移法方程。

$$r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+R_{1P}=0$$
$$r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+R_{2P}=0$$

(3) 计算系数与自由项计算。

① 作基本结构荷载作用时的 M_P 图［图 9.13(c)］、$Z_1=1$ 作用时(此时 $Z_2=0$)的 $\overline{M}_1$［图 9.13(d)］以及 $Z_2=1$ 作用时(此时 $Z_1=0$)的 $\overline{M}_2$ 图［图 9.13(e)］。

② 根据 M_P 图及结点转动平衡［图 9.13(c)］得

$$R_{1P}=30\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$R_{2P}=0$$

③ 根据 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 图及结点转动平衡［图 9.13(d)、(e)］得

$$r_{11}=16+12+12=40$$
$$r_{21}=8$$
$$r_{12}=8(\text{或应用反力互等定理 } r_{12}=r_{21})$$
$$r_{22}=16+12+8=36$$

(4) 解方程，求位移。

$$40Z_1+8Z_2+30=0$$
$$8Z_1+36Z_2+0=0$$

解得 $\begin{cases}Z_1=-0.78\\Z_2=0.17\end{cases}$

(5) 作最后弯矩图，$M=\overline{M}_1Z_1+\overline{M}_2Z_1+M_P$，如图 9.13(f)所示。

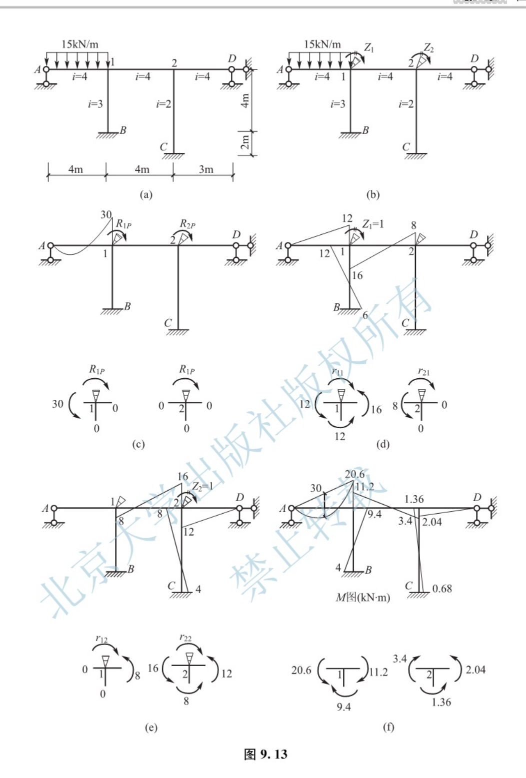


图 9.13

(6) 校核。结点 1、2［图 9.13(f)］满足力矩平衡：

$$\sum M_1 = 20.6 - 11.2 - 9.4 = 0$$

$$\sum M_2 = 1.36 + 2.04 - 3.4 = 0$$

2) 位移法计算有侧移刚架

【例 9-3】 试用位移法计算图 9.14(a)所示刚架，绘其弯矩图。各杆 EI=常数。

解：(1) 确定位移法基本未知量，分别为 C 结点的角位移 Z_1 和 C、D 结点的线位移 Z_2，$n=2$。形成基本体系，如图 9.14(b)所示。为方便起见，此处亦用符号⊣⊢►表示线位移，以后以此沿用。



(2) 建立位移法方程。

$$r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+R_{1P}=0$$
$$r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+R_{2P}=0$$

(3) 计算系数与自由项计算。

① 作基本结构荷载作用时的 M_P 图［图 9.14(c)］和 $Z_1=1$ 作用时(此时 $Z_2=0$)的 $\overline{M}_1$ 图［图 9.14(d)］以及 $Z_2=1$ 作用时(此时 $Z_1=0$)的 $\overline{M}_2$ 图［图 9.14(e)］。

② 根据 M_P 图及结点转动平衡［图 9.14(c)］得

$$R_{1P}=0$$

根据 M_P 图及截取的 CD 部分，由水平方向的平衡［图 9.14(c)］得

$$R_{2P}=\frac{3ql}{8}$$

③ 根据 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 图，利用结点转动平衡、截取 CD 部分由水平方向的平衡［图 9.14(d)、(e)］得

$$r_{11}=3i+4i=7i,\ r_{12}=r_{21}=-\frac{6i}{l},\ r_{22}=\frac{3i}{l^2}+\frac{12i}{l^2}=\frac{15i}{l^2}$$

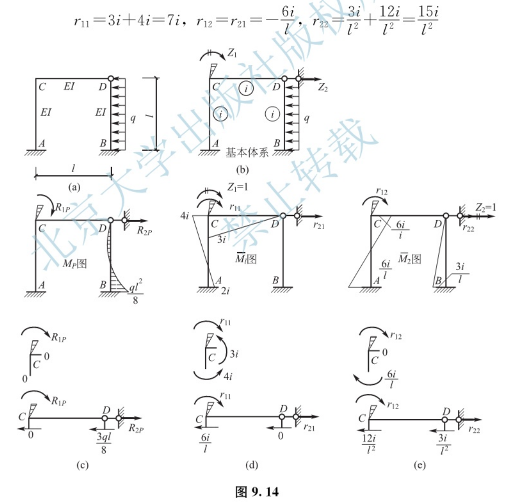


图 9.14

(4) 解位移法方程，求基本未知量。

解方程，得
$$\begin{cases} Z_1=\dfrac{-3ql^3}{92i} \\ Z_2=-\dfrac{7ql^4}{184i} \end{cases}$$

所得结点位移为负值，说明实际位移与所设方向相反。

(5) 计算杆端弯矩，作 M 图。各杆端弯矩可根据叠加公式 $M=\overline{M}_1 Z_1+\overline{M}_2 Z_2+M_P$ 计算。按平衡条件又可计算杆端剪力、轴力，并绘制剪力图与轴力图，读者可自己分析。

结合上述例题，可将位移法的计算步骤归纳如下。

(1) 确定原结构的基本未知量即独立的结点角位移和线位移的数目，加入附加约束，令各附加约束发生与原结构相同的结点位移得到基本体系。

(2) 根据基本结构在荷载等外因和各结点位移共同作用下，附加约束上的反力矩或反力均应等于零的条件，建立位移法的典型方程。

(3) 绘出基本结构在各单位结点位移作用下的弯矩图和荷载作用下(或支座位移、温度变化等其他外因作用下)的弯矩图，由平衡条件求出各系数和自由项。

(4) 求解典型方程，得到作为未知量的各结点位移。

(5) 按叠加法绘制最后弯矩图。

【例 9-4】 图 9.15(a)所示刚架的支座 A 产生转角 φ，支座 B 产生竖向位移 $c=\dfrac{3}{4}l\varphi$。试用位移法绘制其弯矩图。

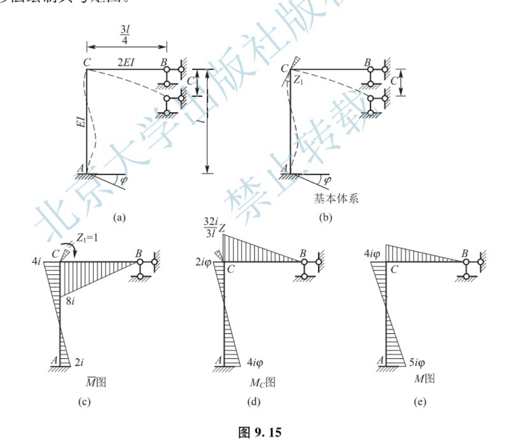


图 9.15

解：(1) 确定位移法基本未知量，此刚架的基本未知量只有结点 C 的转角位移，$n=1$。在结点 C 处加一附加刚臂，形成基本体系，如图 9.15(b)所示。

(2) 建立位移法方程：

$$r_{11}Z_1+R_{1c}=0$$

(3) 计算系数与自由项。

① 作基本结构 $Z_1=1$ 作用时 $\overline{M}_1$ 图［图 9.15(c)］、支座产生位移时 M_c 图［图 9.15(d)］。

② 设 $i=\frac{EI}{l}$，根据 M_c 图及结点转动平衡［图 9.15(d)］得

$$R_{1c}=2i\varphi-\frac{32i}{3l}\Delta=-6i\varphi$$

根据 $\overline{M}_1$ 图及结点力矩平衡［图 9.15(c)］得

$$r_{11}=8i+4i=12i$$

(4) 解位移法方程，求基本未知量。

$$Z_1=-\frac{R_{1c}}{r_{11}}=-\frac{-6i\varphi}{12i}=\frac{\varphi}{2}$$

(5) 计算杆端弯矩，根据叠加公式 $M=\overline{M}_1Z_1+M_c$ 作 M 图，如图 9.15(e)所示。

9.5 位移法计算对称结构

在第 8 章通过力法计算超静定结构时，对于对称性结构得到一个重要的结论：对称结构在正对称荷载作用下，其内力和位移都是正对称的；在反对称荷载作用下，其内力和位移都是反对称的。在位移法中，同样可以利用这一结论，取半边结构的计算简图进行计算，以减少基本未知量的个数。

【例 9-5】 试用位移法绘制图 9.16(a)所示对称刚架的弯矩图。

解：(1) 确定位移法基本未知量，形成基本体系。图 9.16(a)所示刚架有三个结点位移，分别为 C、D 结点的两个角位移和 C、D 结点的一个线位移，但由于此结构为对称刚架，且在对称荷载作用下，可取半边结构的计算简图如图 9.16(b)所示。此半边结构只有一个 C 结点的角位移 Z_1，所以 $n=1$。在结点 C 施加附加刚臂，形成基本体系，如图 9.16(c)所示。

(2) 建立位移法方程。

$$r_{11}Z_1+R_{1P}=0$$

(3) 计算系数与自由项。

① 作基本结构 $Z_1=1$ 作用时的 $\overline{M}_1$ 图［图 9.16(d)］、荷载作用时的 M_P 图［图 9.16(e)］。

② 根据 $\overline{M}_1$ 图，利用结点转动平衡［图 9.16(d)］得(令 $EI=i$)

$$r_{11}=i_{CE}+4i_{CA}=\frac{3EI}{3}+\frac{4EI}{4}=2i$$

③ 根据 M_P 图及结点转动平衡［图 9.16(e)］得

$$R_{1P}=-18\text{kN}\cdot\text{m}$$

(4) 解位移法方程，求基本未知量。

$$Z_1=\frac{9}{i}$$

(5) 计算杆端弯矩，作 M 图，如图 9.16(f)所示。各杆端弯矩可根据叠加公式 $M=\overline{M}_1Z_1+\overline{M}_2Z_2+M_P$ 计算。

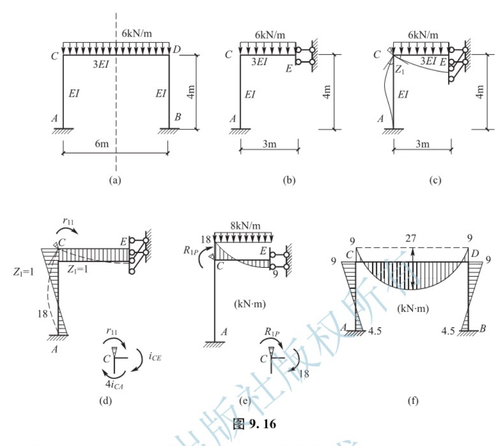


图 9.16

当对称结构承受一般非对称荷载作用时，可将荷载分解为正、反对称的两组，分别加于结构上求解，然后再将结果叠加。例如图 9.17(a)所示的对称刚架，在正对称荷载作用下只有正对称的基本未知量，即两结点的一对正对称的转角 Z_1 ［图 9.17(b)］；同理，在反对称荷载作用下，将只有反对称的基本未知量 Z_2 和 Z_3 ［图 9.17(c)］。在正、反对称荷载的作用下，均可只取结构的一半即半边结构来进行计算［图 9.17(d)、(e)］。

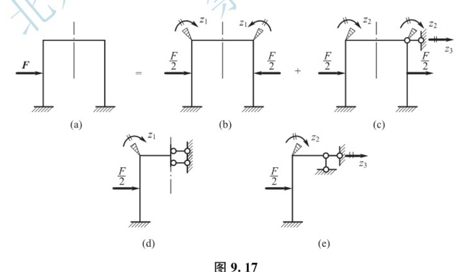


图 9.17

【例 9-6】 试选择图 9.18(a)所示对称刚架的计算方法。EI=常数。

解： 此结构为对称结构在一般荷载作用下。可将荷载分解为对称和反对称两组，分别如图 9.18(b)、(c)所示。对称和反对称荷载作用下的半边结构分别如图 9.18(d)、(e)所示。两种情况下用力法和位移法计算时基本未知量数目见表 9-3。

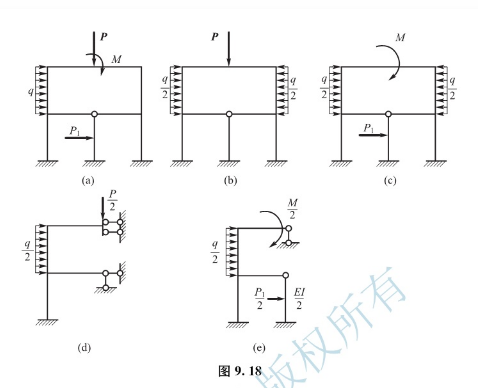


图 9.18

表 9-3 基本未知量数目

荷载	总荷载	对称荷载	反对称荷载
力法	7	4	3
位移法	6	2	4

由表 9-3 可以看出，对称荷载作用宜采用位移法，反对称荷载作用宜采用力法。

9.6 用直接平衡法建立位移法方程

位移法计算超静定结构时，也可以不通过基本体系，而以杆件为单元，利用杆件的形常数和载常数，叠加得到每一杆件的杆端弯矩和杆端角位移、相对杆端线位移、荷载的关系式，然后直接建立结点平衡方程、截面平衡方程，计算基本未知量。

1. 等截面直杆的转角位移方程

9.2 节给出了等截面直杆的形常数和载常数，对于任一等截面直杆，当杆两端同时有角位移、线位移和荷载作用时，即可根据形常数和载常数，利用叠加原理写出杆件杆端力的表达式，此表达式称为等截面直杆的转角位移方程。

1）两端刚结(包括固定)的等截面直杆

图 9.19 所示的两端固定的等截面直杆 AB，A 端有转角 θ_A，B 端有转角 θ_B，AB 两端有相对线位移 Δ，并有荷载作用，应用形常数和载常数的公式并叠加，可得

$$\left.\begin{aligned} M_{AB}&=4i_{AB}\theta_A+2i_{AB}\theta_B-6i_{AB}\frac{\Delta}{l}+M_{AB}^{F} \\ M_{BA}&=2i_{AB}\theta_A+4i_{AB}\theta_B-6i_{AB}\frac{\Delta}{l}+M_{BA}^{F} \end{aligned}\right\} \tag{9-5}$$

2）一端刚结(包括固定)、一端铰支的等截面直杆

图 9.20 所示一端固定、一端铰支的等截面直杆 AB，A 端有转角 θ_A，AB 两端有相对线位移 Δ，并有荷载作用，应用形常数和载常数的公式并叠加，可得

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= 3i_{AB}\theta_A - 3i_{AB}\frac{\Delta}{l} + M_{AB}^{F} \\ M_{BA} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9-6}$$

3）一端刚结(包括固定)、一端定向支座的等截面直杆

图 9.21 所示一端固定、一端定向支座的等截面直杆 AB，A 端有转角 θ_A，并有荷载作用，应用形常数和载常数的公式并叠加，可得

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= i_{AB}\theta_A + M_{AB}^{F} \\ M_{BA} &= -\theta_A + M_{BA}^{F} \end{aligned}\right\} \tag{9-7}$$

式(9－5)～式(9－7)即为等截面直杆的转角位移方程。式中各符号的意义及正负号规定同前。

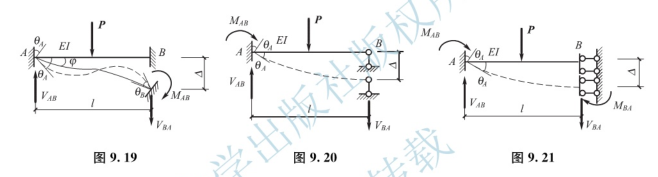


图 9.19　　图 9.20　　图 9.21

2. 用直接平衡法计算超静定结构

通过前面各节的分析，可以明确位移法的基本方程(即典型方程)的实质，就是反映原结构结点和截面的平衡条件。因此，也可以利用转角位移方程直接由原结构的平衡条件来建立位移法的基本方程。现以图 9.22(a)的刚架为例来说明这一方法和计算步骤。

【例 9－7】 用直接平衡法计算图 9.22(a)所示的刚架，绘出 M 图。

解：(1) 确定基本未知量。此刚架用位移法求解时有两个基本未知量：刚结点 C 的转角 Δ_1，结点 C、D 的水平位移 Δ_2。

(2) 列各杆端弯矩表达式。

根据等截面直杆的转角位移方程式(9－5)、式(9－6)，令 $i_{CA}=i_{BD}=\dfrac{EI}{4}=i$，$i_{CD}=\dfrac{3EI}{6}=2i$，各杆杆端弯矩表达式为

$$\left.\begin{aligned} M_{CA} &= 4i_{CA}\Delta_1 - \frac{6i_{CA}}{l_{CA}}\Delta_2 = 4i\Delta_1 - \frac{3i}{2}\Delta_2 \\ M_{AC} &= 2i_{CA}\Delta_1 - \frac{6i_{CA}}{l_{CA}}\Delta_2 = 2i\Delta_1 - \frac{3i}{2}\Delta_2 \\ M_{CD} &= 3i_{CD}\Delta_1 = 3(2i)\Delta_1 = 6i\Delta_1 \\ M_{BD} &= -\frac{3i_{BD}}{l_{BD}}\Delta_2 - \frac{10}{8}\times 4^2 = -\frac{3i}{4}\Delta_2 - 20 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

（3）建立位移法方程。相应于结点 C 的转角 Δ_1，取结点 C 为隔离体［图 9.22(b)］，建立力矩平衡方程：

$$\sum M_C=0,\quad M_{CD}+M_{CA}=0,\quad 即$$

$$10i\Delta_1-\frac{3}{2}i\Delta_2=0 \tag{b}$$

相应于结点 C、D 的水平位移 Δ_2，截取柱顶以上的横梁为隔离体［图 9.22(c)］，建立水平投影平衡方程：

$$\sum X=0,\quad V_{CA}+V_{DB}=0 \tag{c}$$

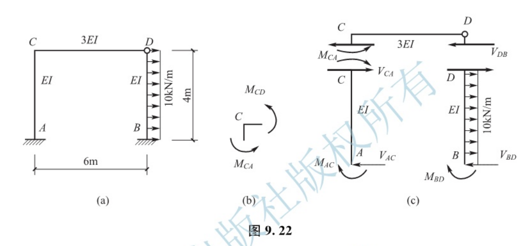


图 9.22

分别取 CA、DB 为隔离体［图 9.22(c)］，得力矩平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}\sum M_A=0,\quad V_{CA}&=-\frac{M_{AC}+M_{CA}}{l_{AC}}\\ \sum M_D=0,\quad V_{DB}&=-\frac{M_{BD}}{l_{BD}}-\frac{1}{2}ql_{BD}\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

将式(d)代入式(b)得

$$M_{AC}+M_{CA}+M_{BD}+80=0 \tag{e}$$

再将式(a)代入式(e)得

$$6i\Delta_1-3.75\Delta_2+80=0 \tag{f}$$

（4）解联立方程组式(b)、式(f)，求解 Δ_1、Δ_2。

$$\left.\begin{aligned}10i\Delta_1-\frac{3}{2}i\Delta_2&=0\\ 6i\Delta_1-3.75\Delta_2+80&=0\end{aligned}\right\}$$

得 $\Delta_1=3.16\dfrac{1}{i}$，$\Delta_2=21.05\dfrac{1}{i}$

（5）将 Δ_1、Δ_2 代入式(a)，得到各杆端实际弯矩：

$$M_{CA}=-18.95\text{kN}\cdot\text{m},\quad M_{AC}=-25.26\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD}=18.95\text{kN}\cdot\text{m},\quad M_{BD}=-35.79\text{kN}\cdot\text{m}$$

（6）作 M 图，如图 9.23 所示。

图 9.23

本 章 小 结

本章讨论了用位移法计算超静定结构问题。位移法是结构分析的另一种主要方法，它既可计算超静定结构内力，也可用于计算静定结构的内力(显然，其计算过程要比用静力平衡方程求解静定结构烦琐得多)，而力法只能用于超静定结构的分析。

位移法的计算原理是以结点处的独立角位移和线位移为基本未知量，在相应的基本未知量处人为地附加约束而将原结构“离散”为若干个单跨超静定梁(由力法已求出单个杆件的杆端内力用杆端位移表达的关系式)，取这些单跨梁(单元)作为计算的基本结构，这些杆端位移应与其所在结点的其他杆端位移相协调；然后利用原结构在荷载和结点位移的共同作用下，使每个附加约束中的反力(反力矩)都应等于零的平衡条件建立位移法的基本方程，求解此方程得结点位移。求得结点位移后，原结构的计算就转化为单个杆件的计算问题了。

由力法算出单跨超静定梁在杆端发生角位移、线位移以及在荷载作用下的杆端力，是位移法的基础。将单跨超静定梁(三种类型：两端固定梁、一端固定另一端链杆支座或固定铰支座梁、一端固定另一端滑动支座梁)在杆端发生角位移、线位移所引起的杆端力称为形常数；将单跨超静定梁在荷载作用下所引起的杆端力称为载常数。

形常数中应用到了线刚度 $i=EI/l$(单位长度的刚度)的概念。显然，当杆件的刚度不变，杆件越长其线刚度就越小，就越容易被弯曲。

用位移法计算结构时，确定基本未知量(角位移和线位移)是学习中重要的一步，应重点掌握。确定基本未知量的基本假设是：手算时弯曲直杆忽略轴力、剪力所产生的变形；直杆弯曲后，两端之间的距离保持不变。确定基本未知量的方法是：铰处弯矩为零，故铰处角位移不作为基本未知量；抗弯刚度无穷大(即 $EI=\infty$)的杆端结点处不产生转动；由于静定部分的内力可由平衡条件求出，故静定部分结点处的角位移和线位移不需作为基本未知量。

位移法的基本体系在荷载(或支座移动，或温度改变等)及结点位移作用下，每一个附加约束中的反力或反力矩都应等于零，据此列出位移法的基本方程。应充分理解位移法基本方程所代表的平衡条件的意义，以及方程中各项系数及自由项的物理意义。

充分利用结构的对称性质，选择对称的基本体系进行计算。在荷载对称或反对称作用时，可取半结构或1/4结构进行计算。

求解超静定结构的两大基本方法——位移法与力法有相似性，了解它们之间的对应关系可以有助于学习到科学的认知方法。表9-4是位移法与力法的比较。

表9-4　位移法与力法的比较

项目	位移法	力法
基本未知量	独立的结点角位移和线位移，基本未知量数目与超静定结构次数无关	多余约束中的反力和反力矩，基本未知量数目等于超静定结构次数
基本结构	人为地增加附加约束，以“单个杆件”为位移法计算的基本结构	去掉多余约束，以“静定结构”为力法计算的基本结构

（续）

项目	位移法	力法
基本方程的物理意义	基本结构在原结构荷载及结点位移共同作用下，每一个附加约束中的附加反力都应等于零，实质上是静力平衡方程	基本结构中沿每一个多余未知力方向的位移与原结构中相应的位移相等，实质上是位移条件方程
系数的物理意义	刚度系数：产生单位位移时所需施加的力	柔度系数：单位力所产生的位移
自由项的物理意义	基本结构在附加约束中的力	基本结构沿基本未知量方向的位移
应用范围	任何结构	超静定结构

关键术语

结点线位移(joint linear displacement)；结点角位移(joint angular displacement)；刚臂(rigid arm)；固端弯矩(fixed - end moment)；形常数(shape constant)；载常数(load constant)；线刚度(linear stiffness)；位移法(displacement method)；基本结构(basic structure)；基本体系(basic system)；位移法的基本未知量(primary unknowns in displacement method)；位移法典型方程(canonical equation of displacement method)；无侧移刚架(rigid frame without sideways)；有侧移刚架(rigid frame with sideways)；转角位移方程(slope - deflection equation)。

习 题 9

一、思考题

1. 位移法中的独立结点角位移和线位移是如何确定的？有哪些根据和假设？

2. 为什么铰支座和铰结点处的角位移可以不选作位移法的基本未知量？

3. 为什么计算内力时可采用刚度的相对值，而计算位移时则需采用刚度的真值？

4. 在力法和位移法中各以什么方式满足平衡条件和变形连续条件？

5. 为什么对称结构在对称荷载和反对称荷载作用时可以取半边结构计算？荷载不对称时还能不能取半边结构计算？

6. 对称结构如不取半边结构，而直接利用原结构用位移法计算，是否也能利用对称性简化计算？

二、填空题

1. 在确定位移法的基本未知量时，考虑了汇交于结点的各杆端间的____________。

2. 位移法可解超静定结构，________解静定结构，位移法的典型方程体现了________条件。

3. 杆件杆端转动刚度的大小取决于____________与____________。

4. 图 9.24 所示刚架各杆线刚度 i 相同，不计轴向变形，其 $M_{AD}=$__________，$M_{BA}=$__________。

5. 图 9.25 所示结构(不计轴向变形)的 $M_{AB}=$__________。

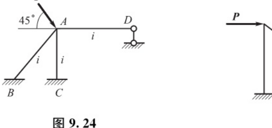


图 9.24

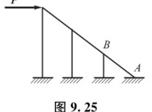


图 9.25

6. 位移法典型方程中各副系数是关于主对角线对称的，即 $k_{ij}=k_{ji}(i\neq j)$，它的理论依据是__________。

7. 校核位移法计算结果的依据是要满足__________条件。

8. 图 9.26 所示结构(除注明外，$EI=$常数)用位移法求解时的基本未知量数目：(a)________；(b)________；(c)________；(d)________；(e)________；(f)________；(g)________；(h)________。

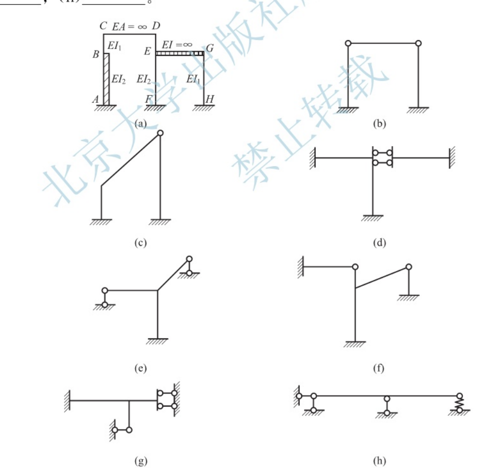


图 9.26

9. 图 9.27 所示结构(除注明外，$EI=$常数)用位移法求解时的基本未知量数目：(a)________；(b)________；(c)________；(d)________；(e)________；(f)________；

(g)________；(h)________。

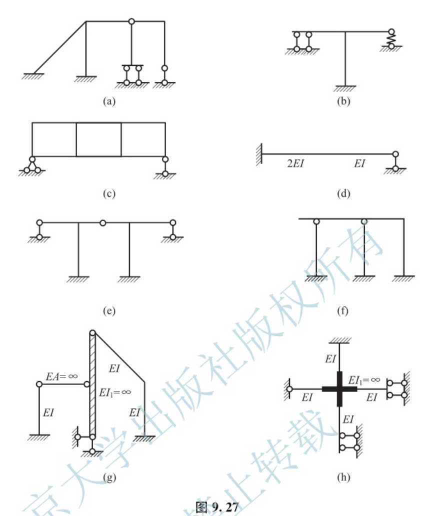


图 9.27

10. 对称结构在反对称荷载作用下产生________的位移。

11. 对称结构在对称荷载作用下，处于对称位置的结点角位移大小相等，方向________。

三、判断题

1. 超静定结构中杆端弯矩只取决于杆端位移。(　　)

2. 位移法中角位移未知量的数目恒等于刚结点数。(　　)

3. 位移法是以某些结点位移作为基本未知数，先求位移，再据此推求内力的一种结构分析的方法。(　　)

4. 忽略轴向变形，图 9.28(a)所示结构的弯矩图为图 9.28(b)(　　)。

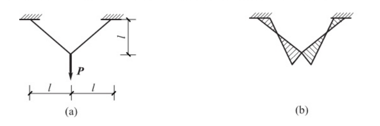


图 9.28

5. 图 9.29(b)是图 9.29(a)所示结构用位移法计算时的$\overline{M_1}$图。(　　)

6. 图 9.30 所示结构在荷载作用下的弯矩图形状是正确的。(　　)

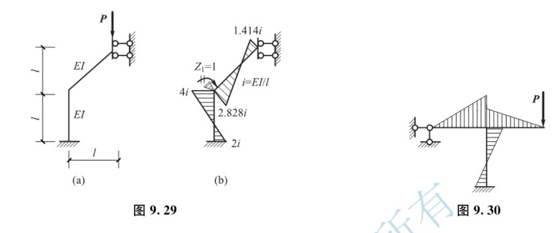


图 9.29　　图 9.30

7. 图 9.31(a)为对称结构，用位移法求解时可取半边结构如图 9.31(b)所示。(　　)

8. 图 9.32(b)为图 9.32(a)的弯矩图。(　　)

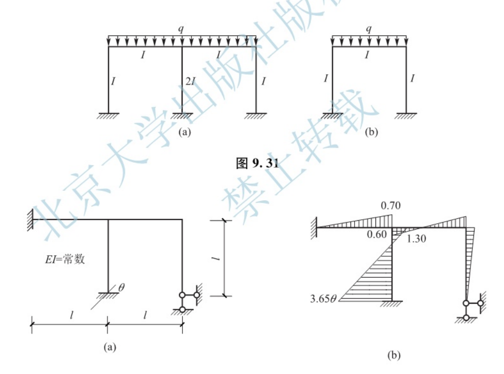


图 9.31

图 9.32

四、选择题

1. 位移法的基本未知量是(　　)。

   A. 结构上任一截面的角位移和线位移

   B. 结构上所有截面的角位移和线位移

   C. 结构上所有结点的角位移和线位移

   D. 结构上所有结点的独立角位移和独立线位移

2. 用位移法计算超静定结构时考虑了(　　)。

   A. 物理条件、几何条件和平衡条件

B. 平衡条件
C. 平衡条件与物理条件
D. 平衡条件与几何条件

3. 在位移法典型方程的系数和自由项中，数值可为正、负实数的有(　　)。
A. 主系数　　B. 主系数和副系数
C. 主系数和自由项　　D. 副系数和自由项

4. 位移法的适用范围是(　　)。
A. 不能解静定结构　　B. 只能解超静定结构
C. 只能解平面刚架　　D. 可解任意结构

5. 用位移法计算静定、超静定结构时，每根杆都视为(　　)。
A. 单跨静定梁
B. 单跨超静定梁
C. 两端固定梁
D. 一端固定而另一端铰支的梁

6. 用位移法计算刚架，常引入轴向刚度条件，即“受弯直杆在变形后两端距离保持不变”。此结论是由(　　)假定导出的。
A. 忽略受弯直杆的轴向变形和剪切变形
B. 弯曲变形是微小的
C. 变形后杆件截面仍与变形曲线相垂直
D. 假定 A 与 B 同时成立

7. 位移法的理论基础是(　　)。
A. 力法
B. 胡克定律
C. 确定的位移与确定的内力之间的对应关系
D. 位移互等定理

8. 图 9.33 所示结构用位移法计算时，其最少的未知数为(　　)。
A. 1　　B. 2
C. 3　　D. 4

9. 图 9.34 所示结构用位移法计算时的基本未知量数目为(　　)。
A. 8　　B. 9
C. 10　　D. 7

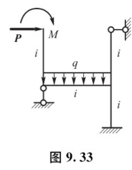


图 9.33

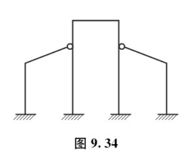


图 9.34

10. 图 9.35 所示结构 EI=常数，截面 C、D 两处的弯矩值(单位：kN·m)M_C、M_D

分别为(　　)。

A. 1.0，2.0　　B. 2.0，1.0

C. －1.0，－2.0　　D. －2.0，－1.0

11. 已知刚架的弯矩图如图 9.36 所示，AB 杆的抗弯刚度为 EI，BC 杆的抗弯刚度为 $2EI$，则结点 B 的角位移等于(　　)。

A. $10/(3EI)$　　B. $20/(EI)$

C. $20/(3EI)$　　D. 由于荷载未给出，无法求出

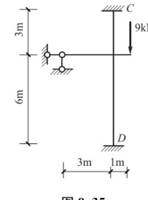


图 9.35

图 9.36

12. 图 9.37 所示对称刚架，在反对称荷载作用下，正确的半结构为(　　)。

A. 图(b)　　B. 图(c)

C. 图(d)　　D. 图(e)

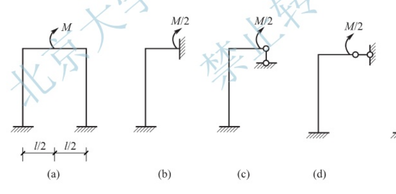
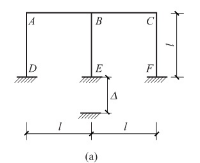


图 9.37

13. 已知图 9.38 所示刚架 EI＝常数，支座 E 下沉 Δ，则 M_{AD} 为(　　)。



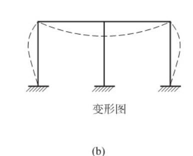


图 9.38

A. $\dfrac{3\Delta EI}{l^2}$　　B. $-\dfrac{3\Delta EI}{l^2}$

C. $\dfrac{3\Delta EI}{l^3}$　　D. $-\dfrac{3\Delta EI}{l^3}$

五、计算分析题

1．试确定图 9.39 所示各图用位移法计算时的基本未知量，并画出基本结构。

图 9.39

2．画出图 9.40 所示结构的基本体系，并画出基本结构单位位移作用时的弯矩图和荷载作用时的弯矩图。

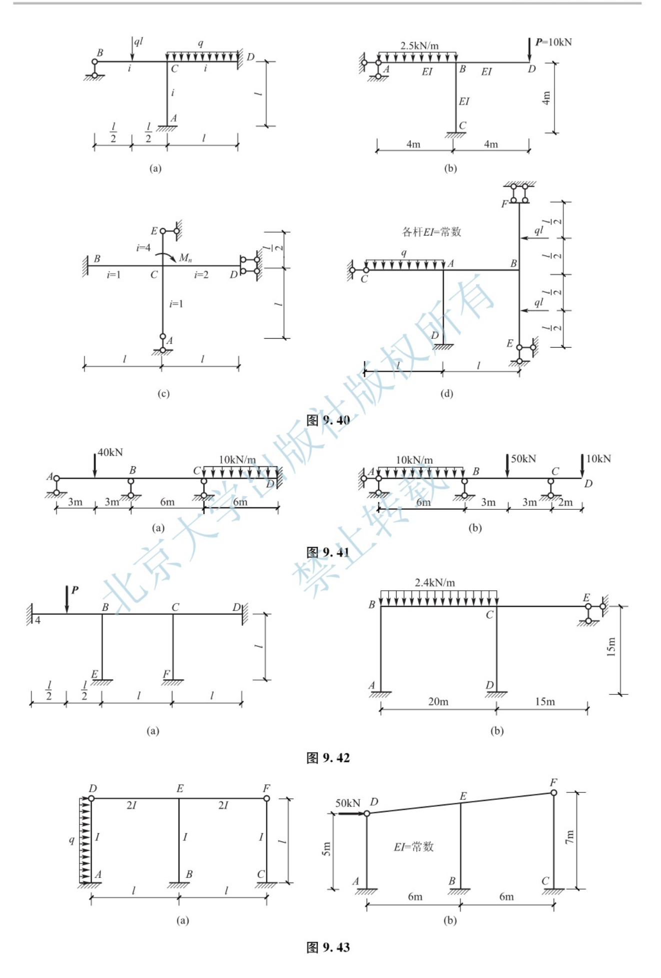
3．用位移法计算图 9.41 所示连续梁，作 M 图。

4．用位移法计算图 9.42 所示无侧移刚架，作 M 图。

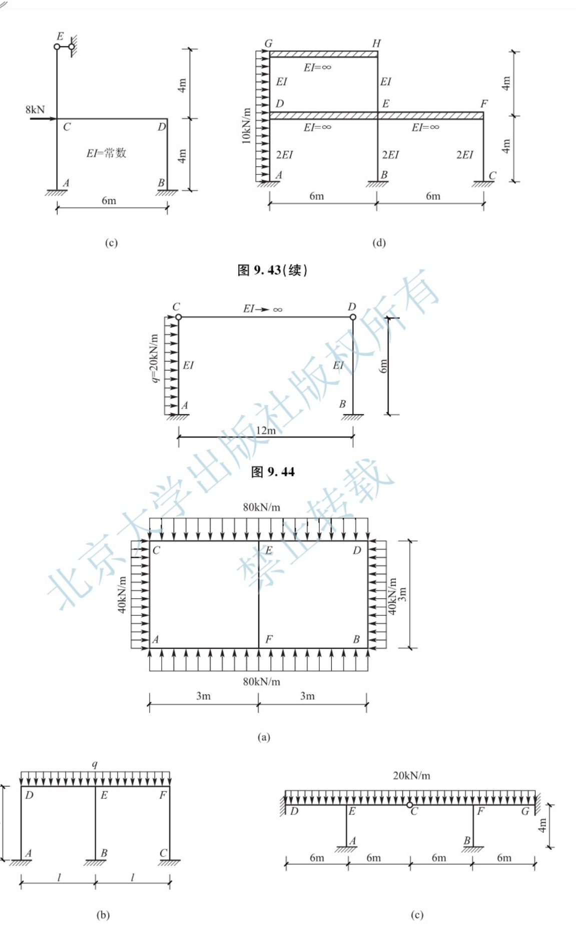
5．用位移法计算图 9.43 所示有侧移刚架，作 M 图。

6．用位移法计算图 9.44 所示排架，作 M、V、N 图。

7．利用对称性计算图 9.45 所示刚架，作 M 图。



B
ql
q
D
i
C
i
i
l
A
$\frac{l}{2}$
$\frac{l}{2}$
l
(a)
2.5kN/m
P=10kN
A
EI
B
EI
D
EI
4m
C
4m
4m
(b)
E
i=4
M_n
B
i=1
C
i=2
D
$\frac{l}{2}$
i=1
l
A
l
l
(c)
F
各杆EI=常数
ql
q
A
B
C
ql
D
E
l
l
(d)
图 9.40
40kN
10kN/m
A
B
C
D
3m
3m
6m
6m
(a)
10kN/m
50kN
10kN
A
B
C
D
6m
3m
3m
2m
(b)
图 9.41
P
B
C
D
4
E
F
l
$\frac{l}{2}$
$\frac{l}{2}$
l
l
(a)
2.4kN/m
B
C
E
15m
A
D
20m
15m
(b)
图 9.42
D
E
F
2I
2I
q
I
I
I
l
A
B
C
l
l
(a)
50kN
D
E
F
EI=常数
5m
7m
A
B
C
6m
6m
(b)
图 9.43



(c)

(d)

图 9.43(续)

图 9.44

(a)

(b)

(c)

图 9.45

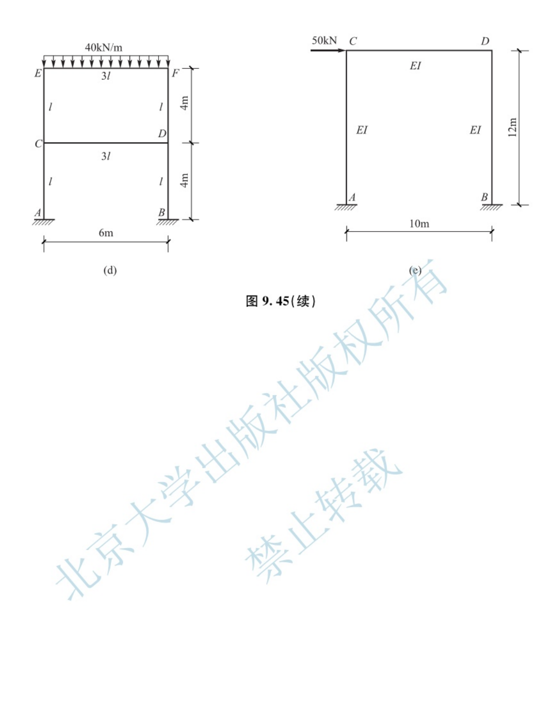


图 9.45(续)

第10章 多高层结构内力分析的手算实用法

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
结构内力分析的手算实用法	掌握	力矩分配法
	熟悉	分层法
	熟悉	反弯点法
	理解	D 值法
	理解	剪力分配法
静定结构与超静定结构特性	熟悉	静定结构与超静定结构特性的比较

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
力矩分配法	掌握	求解无侧移结构
分层法	熟悉	求解在竖向荷载作用下的结构
反弯点法	熟悉	求解在水平荷载作用下的结构(横梁刚度大)
D 值法	理解	求解在水平荷载作用下的结构(一般情况下)
剪力分配法	理解	求解排架等结构



导入案例

一位被全世界土木工程领域称誉的中国人

林同炎，美国工程科学院院士。1912 年 11 月出生，福建省福州人。1931 年毕业于交通大学唐山工程学院。1933 年获美国加州大学硕士学位。1933—1946 年在成渝铁路、滇缅铁路任桥梁课、设计课课长。1946 年定居美国，任教于加利福尼亚大学伯克利分校。1953 年创建林同炎设计事务所。1972 年创建林同炎国际公司，任董事长。

林同炎是美国预应力混凝土学会创始人之一，被誉为预应力先生。他设计的代表性结构物有：旧金山莫斯科尼地下会议大厅、金门大学礼堂、跨度 396m 的拉克埃查基曲线型斜拉桥。设计的路桥遍布世界各地。

他曾获美国和国际多种奖赏和荣誉称号：惠灵顿奖状、贺瓦德金质奖章、弗雷西内奖、伯克利奖和名誉教授称号、四分之一世纪贡献奖等。

1931—1933年在加州大学求学期间，他所写的第一篇论文《直接力矩分配法》，轰动了美国建筑界，他所阐述的方法被命名为“林氏法”而得到广泛应用。

1972年2月23日，尼加拉瓜首都马拉瓜发生地震，市中心511个街区化成废墟，然而林同炎设计建造的位于地震震中的一座60m高、18层的美洲银行大厦巍然屹立。就在它前面的街道上，地面上下错动了1/2in(1in=0.0254m)，但这座18层的大厦的损坏却“仅为电梯井壁联系梁开裂”。林同炎说，他在设计这座高楼时应用了中国哲学中“柔能克刚”的思想，采用了分阶段抗震设计，使建筑物具有柔性，以柔化强，故能在强震中不倒。美国同行高度赞扬林同炎在建筑中应用中国哲学“柔能克刚”的思想，并尊称他为“美国预应力学的功勋人”。各国媒体争相报道此事，世界建筑同行纷纷向林同炎祝贺，从此，林同炎声名大振。

本章学习的主要内容之一就是林同炎创建的力矩分配法，一个工程师可通过简单的手算方式求解超静定结构的渐近法。

在计算机出现以前，各种渐近法与近似法相继出现，其最主要的特点就是避免直接求解大量的线性方程组。渐近法一般不作力学上的简化，而仅是从数学求解上采用逐步逼近精确解的方法。近似法一般都对力学模型或结构变形特点作一定的简化处理，从而可以很快得到所需的内力，或经过求解较少的方程组而得到有用的结果，并且将这些结果制成表格以便设计人员直接使用。这些方法一般都具有物理概念明确，计算方法简单，便于上手操作等特点，直到电子计算机高度发展的今天，熟悉这些方法仍然是结构设计人员必须掌握的基本功。

多高层结构特别是框架体系，在竖向荷载(包括恒载与活载)作用下，由于水平侧移一般均较小，往往略去不计，这时采用力矩分配法作弯矩图是比较有效的。当活荷载较大时，可采用分层法计算。对于在风荷载与地震力(水平)作用下的内力计算，目前多采用 D 值法，更粗略的计算是反弯点法。框-剪结构的最基本手算方法是铰接体系链杆连续化的常微分方程解法。

本章将对上述几种基本方法进行介绍。

10.1 力矩分配法

力矩分配法是一种渐近法，它是由位移法引申出来的。当仅有一个未知量时，它与位移法的原理完全一致，但计算程序上要比位移法简单得多。当出现两个或两个以上未知量时，两种方法从概念上和做法上开始呈现不同，位移法是通过解联立方程组一次得到准确解。而力矩分配法是通过无穷多次逐步接近的方法达到准确解(理论上是无穷多次，但实际操作往往只要两次即可)。

1. 力矩分配法的基本概念

首先通过复习位移法来引申出力矩分配法的基本概念和专用符号(先给符号，最后说明)。图10.1(a)所示结构采用位移法求解的主要结论如下。

基本未知量为转角 Z_1。

$$R_{1P}=M_{12}^{\mathrm{F}}+M_{13}^{\mathrm{F}}=\sum M_{1j}^{\mathrm{F}}=\sum M_{1}^{\mathrm{F}}$$

$$r_{11}=4i_{12}+i_{13}+3i_{14}=s_{12}+s_{13}+s_{14}=\sum s_{1j}$$

$$Z_1=-\frac{R_{1P}}{r_{11}}=-\frac{M_{1}^{\mathrm{F}}}{\sum s_{1j}}$$

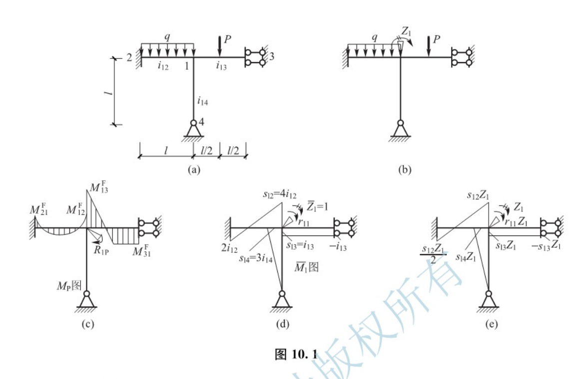


图 10.1

$M=M_P+Z_1\overline{M}_1$，对于 1 点相邻三个近端，有

$$M_{12}=M_{12}^{\rm F}+Z_1 4i_{12}=M_{12}^{\rm F}+\frac{s_{12}}{\sum s_{1j}}(-M_1^{\rm F})=M_{12}^{\rm F}+\mu_{12}(-M_1^{\rm F})=M_{12}^{\rm F}+M_{12}^{\mu}$$

$$M_{13}=M_{13}^{\rm F}+Z_1 i_{13}=M_{13}^{\rm F}+\frac{s_{13}}{\sum s_{1j}}(-M_1^{\rm F})=M_{13}^{\rm F}+\mu_{13}(-M_1^{\rm F})=M_{13}^{\rm F}+M_{13}^{\mu}$$

$$M_{14}=M_{14}^{\rm F}+Z_1 3i_{14}=M_{14}^{\rm F}+\frac{s_{14}}{\sum s_{1j}}(-M_1^{\rm F})=M_{14}^{\rm F}+\mu_{14}(-M_1^{\rm F})=M_{14}^{\rm F}+M_{14}^{\mu}$$

通式为：
$$M_{1k}=M_{1k}^{\rm F}+\mu_{1k}(-M_1^{\rm F})=M_{1k}^{\rm F}+M_{1k}^{\mu} \tag{10-1}$$

与 1 点相连的三个远端，有

$$M_{21}=M_{21}^{\rm F}+\frac{s_{21}Z_1}{2}=M_{21}^{\rm F}+\frac{1}{2}\frac{s_{12}}{\sum s_{1j}}(-M_1^{\rm F})=M_{21}^{\rm F}+\frac{1}{2}M_{12}^{\mu}=M_{21}^{\rm F}+M_{21}^{\rm c}$$

$$M_{31}=M_{31}^{\rm F}-s_{13}Z_1=M_{31}^{\rm F}-\frac{s_{13}}{\sum s_{1j}}(-M_1^{\rm F})=M_{31}^{\rm F}-M_{13}^{\mu}=M_{31}^{\rm F}+M_{31}^{\rm c}$$

$$M_{41}=0$$

通式 ：
$$M_{k1}=M_{k1}^{\rm F}+CM_{1k}^{\mu}=M_{k1}^{\rm F}+M_{k1}^{\rm c} \tag{10-2}$$

$$C=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{（远端固定）}\\ -1 & \text{（远端定向固定）}\\ 0 & \text{（远端铰接）}\end{cases} \tag{10-3}$$

现在将上述结果归纳如下：

由式(10－1)得到，与刚臂相连各杆近端弯矩 M_{1k} 等于该杆端的固端弯矩 $M_{1k}^{\rm F}$ 与分配弯矩 M_{1k}^{μ} 之和；而所谓分配弯矩 M_{1k}^{μ} 是分配系数 μ_{1k} 与不平衡弯矩 $M_1^{\rm F}$ 乘积，并加以负号(称为反号分配)。分配系数 μ_{1k} 为：

$$\mu_{1k}=\frac{s_{1k}}{\sum s_{1j}} \tag{10-4}$$

式中，s_{1k}称为杆端的转动刚度，由式(10－5)看到，转动刚度视远端支承的不同而不一样，有

$$s_{1k}=\begin{cases}4i_{1k} & (\text{远端固定})\\ 3i_{1k} & (\text{远端简支})\\ i_{1k} & (\text{远端定向})\end{cases} \tag{10-5}$$

所谓不平衡弯矩M_1^F，它实质就是1结点的固端弯矩总和，即

$$M_1^F=\sum M_{1j}^F$$

由式(10－2)可以得到，远端弯矩M_{k1}等于该端固端弯矩与传递弯矩M_{k1}^c之和，所谓传递弯矩即传递系数C与分配弯矩M_{1k}^μ的乘积，它体现了近端得到分配弯矩之后传到远端的一部分弯矩，传递系数C视远端支承情况的不同按式(10－3)选用。

一旦杆的近端弯矩与杆的远端弯矩得到以后，利用弯矩图的分段叠加原理，即可得到该杆件的弯矩图，每根杆件都如此处理，结构弯矩图便可得到。

从物理概念上讲，上述分析相当于两个过程，一闭与一松，闭相当于加上刚臂，此时各杆端出现固端弯矩，然后一松，相当于将刚臂转Z_1角，此时近端各得一分配弯矩，远端得以传递弯矩，固端弯矩与分配弯矩或传递弯矩之和即为杆端弯矩。

从计算程序上讲，可以抛弃位移法的整个过程，既不要绘图也不要求解方程，而是首先计算分配系数μ和固端弯矩M^F，然后求不平衡弯矩并反号分配到各杆近端，将分配弯矩传递到各对应的远端，再将杆端前后所得到的弯矩取代数和即为该杆端的总弯矩，最后通过分段叠加得弯矩图。

力矩分配法是林同炎于1933年(21岁)在美国攻读硕士学位时创造的计算方法，发表的硕士论文“A Direct Method of Moment Distribution”，轰动了美国建筑界，被命名为“林氏法”。

【例10－1】 用力矩分配法作图10.2(a)所示刚架的弯矩图。

解：(1) 计算分配系数。

$$\mu_{AB}=\frac{s_{AB}}{\sum s_{Aj}}=\frac{4i_{AB}}{4i_{AB}+3i_{AC}+4i_{AD}}=\frac{4\times 2}{4\times 2+3\times 3+4\times 1}=0.38$$

$$\mu_{AC}=\frac{3\times 3}{4\times 2+3\times 3+4\times 1}=0.43,\quad \mu_{AD}=\frac{4\times 1}{4\times 2+3\times 3+4\times 1}=0.19$$

(2) 计算固端弯矩。

$$M_{AB}^F=\frac{pl}{8}=\frac{100\times 6}{8}=75\text{kN}\cdot\text{m},\quad M_{BA}^F=-75\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AC}^F=-\frac{ql^2}{8}=-\frac{30\times 4^2}{8}=-60\text{kN}\cdot\text{m},\quad M_{CA}^F=0$$

$$M_{AD}^F=M_{DA}^F=0$$

(3) 将分配系数与固端弯矩分别填入图10.2(c)中。

(4) 求A点的不平衡弯矩，并反号分配于各相邻杆端［图10.2(c)］。

$$M_A^F=\sum M_{Aj}^F=75-60=15\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AB}^\mu=0.38\times(-15)=-5.7\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AC}^\mu=0.43\times(-15)=-6.4\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AD}^\mu=0.19\times(-15)=-2.9\text{kN}\cdot\text{m}$$

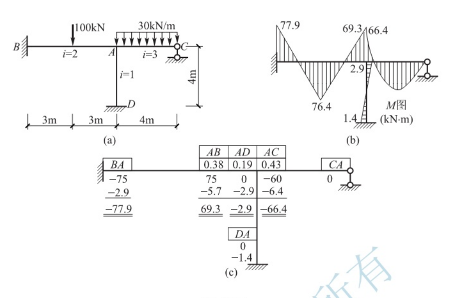


图 10.2

(5) 将分配弯矩传递到各自的远端［图 10.2(c)］。

$$M_{BA}^{C}=\frac{1}{2}M_{AB}^{\mu}=-5.7/2=-2.9$$

$$M_{DA}^{C}=\frac{1}{2}M_{AD}^{\mu}=-2.9/2=-1.4$$

$$M_{CA}^{C}=0$$

(6) 将各杆端固端弯矩与分配弯矩或传递弯矩代数和，即为各杆端总弯矩。按位移法弯矩符号规定将所得杆端总弯矩绘于图 10.2(b)中，并按分段叠加可得最后弯矩图。

上述全部过程完全可在图 10.2(c)与(b)中进行，因此力矩分配法是一种很简捷的方法。

2. 力矩分配法解连续梁

【例 10－2】 用力矩分配法作图 10.3(a)所示连续梁的弯矩图，并求出各支座的反力。

解： 本题有两个刚结点，按位移法计算需加两个刚臂，用力矩分配法计算时就需要在 B 点、C 点两处进行分配，当 B 点刚臂松动时(B 点进行力矩分配)C 点刚臂必须起到阻止转动的作用，而 C 点松动时(C 点进行力矩分配)B 点又重新固定不动，只有这样力矩分配法的原则才能一直进行下去，正是由于遵循这一原则，传递弯矩将始终存在，从理论上讲这将是一个无限循环的过程，但从实用角度出发，各结点进行两轮分配后其结果基本上就可以满足工程需要，当最后一轮分配完毕后就不要再进行传递。

(1) 计算分配系数。

由于梁的 EI 相同，但各梁跨度不同，因此各梁线刚度不同，计算时可略去 EI。

$$\mu_{BA}=\frac{4\times\frac{1}{5}}{4\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{6}}=0.545,\quad \mu_{BC}=\frac{4\times\frac{1}{6}}{4\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{6}}=0.455$$

$$\mu_{CB}=\frac{4\times\frac{1}{6}}{4\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{4}}=0.47,\quad \mu_{CD}=\frac{3\times\frac{1}{4}}{4\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{4}}=0.53$$

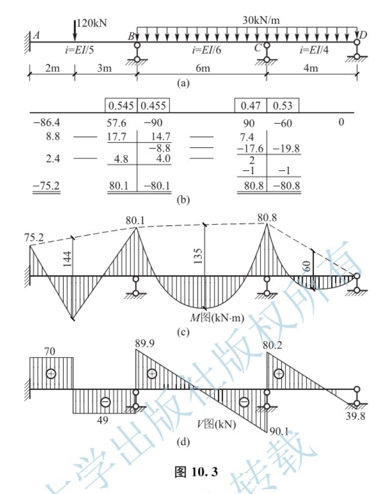


图 10.3

(2) 计算固端弯矩。

$$M_{AB}^{F}=-\frac{Pab^2}{l^2}=-\frac{120\times2\times3^2}{5^2}=-86.4\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA}^{F}=\frac{Pa^2b}{l^2}=\frac{120\times2^2\times3}{5^2}=57.6\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^{F}=-\frac{ql^2}{12}=-\frac{30\times6^2}{12}=-90\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB}^{F}=90\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD}^{F}=-\frac{30\times4^2}{8}=-60\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC}^{F}=0$$

(3) 分配与传递。

B、C 点分配时由哪一点开始都可以，但为使收敛加快，一般由不平衡弯矩绝对值较大者开始，本例中可自 B 点开始，然后 C 点再分配，过程见图 10.3(b)。当 B 结点第一轮分配后，传给 C 点 7.4kN·m 的一个弯矩，此时 C 点的不平衡弯矩应为 90－60＋7.4＝37.4kN·m，然后再分配，当传给 B 点－8.8kN·m 的力矩后，此值即为 B 点新的不平衡弯矩，需将它重新分配，到这时 B 点已分配两轮，传给 C 点 2kN·m 后，C 点做最后一次分配，至此分配传递工作即认为结束，不要再继续传给 B 点，从分配数据值的大小看

到，此时已在 1kN·m 以下，误差在 1%～2%左右，从工程实用角度看是可行的。

(4) 作 M 图与 V 图。

最后将每一杆端弯矩相加求和即可得到杆端最终弯矩，弯矩图如图 10.3(c)所示，根据弯矩与荷载可作剪力图［图 10.3(d)］。根据支座结点竖向平衡，可求得各支座反力。

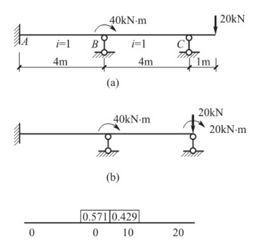
本题竖向支座反力自左向右分别为 71kN、138.9kN、170.3kN、39.8kN，总和为 420kN，与竖向荷载平衡。

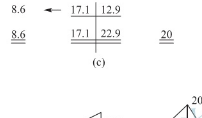
【例 10－3】 用力矩分配法解图 10.4(a)所示连续梁，作弯矩图。

解：本题主要解决带伸出端和结点含有集中力偶的连续梁如何使用力矩分配法。此处仅给出常用的简要方法，其他方法讨论略去，有关伸出端的处理可采用图 10.4(b)的方式，将静定的伸出部分去掉代之以集中力与集中力偶，集中力仅对支座 C 有影响而对梁弯矩无影响，力偶可视为荷载，此时 C 端应视为铰接，计算分配系数：

$$\mu_{BA}=\frac{4i}{4i+3i}=0.571,\quad \mu_{BC}=\frac{3i}{4i+3i}=0.429$$

计算固端弯矩时，除 C 截面应有正的杆端弯矩 20kN·m 外，它将引起 B 点右侧截面正的固端弯矩 (20/2＝10kN·m)。支座 B 上的集中力偶 40kN·m 可作为力矩直接参加分配(不变号)而不再记入固端弯矩内。本题计算 B 结点分配弯矩时，总和为 40－10＝30kN·m，分到 B 点左侧截面 17.1kN·m，分到 B 点右侧截面 12.9kN·m，传递后即得到各杆端弯矩，弯矩图示于图 10.4(d)中。





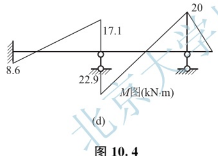


图 10.4

3. *力矩分配法解多层多跨刚架*

多层多跨刚架在竖向荷载作用下用力矩分配法求解是比较有效的，但由于刚结点很多，分配传递的过程很容易混乱，为此一般常采用同时分配，同时传递的程序，即分配时每一结点都作分配，当所有结点分配完毕以后，再进行传递，各杆件又同时进行，全部传递结束后，再进行第二轮分配，并且到此为止，通过求和便可得到各杆端最后弯矩。

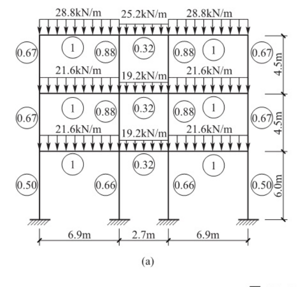
对于对称的多层多跨刚架在对称荷载作用下采用力矩分配法从理论上讲是正确的，但对于非对称荷载，这种计算只能是近似的。

【例 10－4】 用力矩分配法解图 10.5(a)所示两层三跨刚架(圆圈中数字为相对线刚度)。

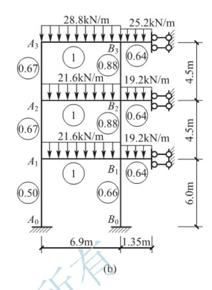
解：由于结构对称荷载对称，故取图 10.5(b)所示半刚架进行计算，但中跨线刚度要乘 2 变为 0.64。

(1) 计算分配系数。

以顶层为例：



(a)



(b)

图 10.5

$$\mu_{A_3A_2}=\frac{4\times0.67}{4\times0.67+4\times1}=0.4,\quad \mu_{A_3B_3}=\frac{4\times1}{4\times0.67+4\times1}=0.6$$

$$\mu_{B_3A_3}=\frac{4\times1}{4\times1+4\times0.88+0.64}=0.49,\quad \mu_{B_3B_2}=\frac{4\times0.88}{4\times1+4\times0.88+0.64}=0.43$$

$$\mu_{B_3C_3}=\frac{0.64}{4\times1+4\times0.88+0.64}=0.08$$

其余结点同样计算，并将所得值标注于图 10.6(a)的相应方格内。

(2) 计算固端弯矩。

以 2 层为例：

$$M^F_{A_2B_2}=-\frac{1}{12}\times21.6\times6.9^2=-85.7\text{kN}\cdot\text{m},\quad M_{B_2A_2}=85.7\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M^F_{B_2C_2}=-\frac{1}{3}\times19.2\times1.35^2=-11.7\text{kN}\cdot\text{m}$$

其余各层同样计算，并将所得值标注于分配系数的下方。

(3) 各结点同时分配。

以 B_2 结点为例：

$$M^{\mu}_{B_2A_2}=0.34\times[-(85.7-11.7)]=-25.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M^{\mu}_{B_2B_3}=M^{\mu}_{B_2B_1}=0.3\times[-(85.7-11.7)]=-22.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M^{\mu}_{B_2C_2}=0.06\times[-(85.7-11.7)]=-4.4\text{kN}\cdot\text{m}$$

(4) 各杆同时传递。

以 A_3A_2 杆为例，A_3 端得到分配弯矩 45.7kN·m，传给 A_2 端 1/2 等于 22.9kN·m [见图 10.6(a)中的对应连线]，同样 A_2 端得到分配弯矩 24.9kN·m 传给 A_3 端为 12.5kN·m。

(5) 进行完第二次分配后将数值前后相加求和即可得到各杆端弯矩。

根据所得结果绘制弯矩图，见图 10.6(b)。

(a)

(b)

图 10.6

10.2 分 层 法

考查例 10-4 中各层柱力矩分配的关系，以 $A_3A_2A_1A_0$ 柱为例，当 A_3 点得到一分配力矩 45.7kN·m 以后，传给 A_2 结点 22.9kN·m，该力矩在 A_2 再次分配后，传给下柱力矩为 22.9×0.29=6.6kN·m，此力矩传给 A_1 结点只有 3.3kN·m，然后继续在 A_1 点分配，给 A_1 下柱的分配力矩只有 3.3×0.23=0.76kN·m，再传到 A_0 点仅剩 0.38kN·m。这虽然是一个特例，但它具有普遍性。一般说来力矩隔层影响是很小的，基于这一点，分层法

将原来多层刚架［图 10.7(a)］的每一层视为一个独立体系，如图 10.7(b)所示，顶层横梁只联系顶层柱，而其余横梁则只联系上下两层柱，柱端均取为固定支座形式。由于各柱端(除底层外)实际为弹性支承，因此采用固定端后等于加大了柱的刚度，为此分层法规定，凡弹性支承视为固定端的所有柱，均将其线刚度 i 乘以 0.9，变为 $0.9i$，与之相应的传递系数不能再取 $C=\frac{1}{2}$，而应取 $C=\frac{1}{3}$。其原理简述如下。

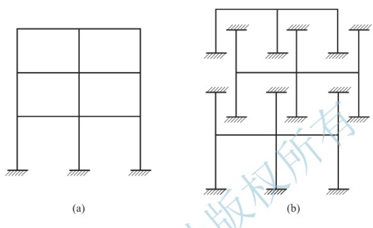


图 10.7

图 10.8(a)取成远端固定，柱为 $0.9i$，此时上部转动单位角时，其相应力矩为 $3.6i$，保持这一状态(单位角和 $3.6i$ 的力矩)，但远端实际为弹性支承(可以转动)，并且柱的实际线刚度应为 i［图 10.8(b)］，此时远端弯矩属于未知。现在取图 10.8(c)、(b)两图状态相加得到图 10.8(e)的状态，实质上图 10.8(e)就相当于图 10.8(b)(满足上部单位角和 $3.6i$ 力矩以及柱线刚度为 i 和远端弹性支承)，由图 10.8(e)中可得到远端弯矩与近端弯矩之比 $C=\frac{1.2i}{3.6i}=\frac{1}{3}$。

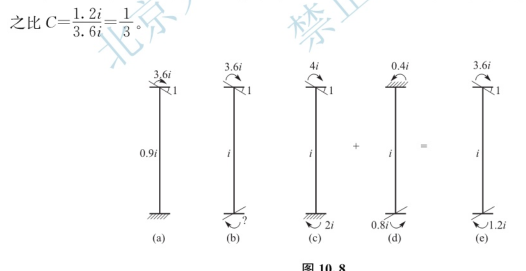


图 10.8

分层法中各独立结构一般可按力矩分配法去求解，解完后，各独立结构横梁的弯矩即为原结构该层梁的弯矩，但由于一层以上各柱均使用了两次，故柱的弯矩应为两者之和。这样做的结果一般都会使梁柱相交结点力矩不再平衡，如差值很大可再进行一次分配。

【例 10-5】 用分层法解图 10.9(a)所示刚架。取 $i_b=3i_z$。

解： 按分层法将此结构分为三个独立体系，相应各层柱的线刚度要乘 0.9(底层除外)。

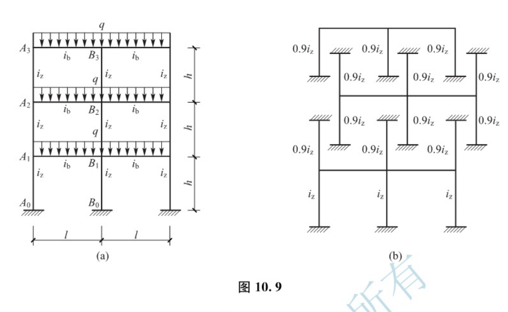


图 10.9

由于结构对称荷载对称，因此每一独立体系都可取半刚架进行计算。图 10.10 给出了用力矩分配法解各层刚架的过程，其中固端弯矩 $M_0=\frac{ql^2}{12}$，由于每个单层体系都仅有一个刚结点，故只分配一次即可，柱的弯矩在传递中取 1/3，只有底层传递为 1/2。最后弯矩图示于图 10.11 中。不难看出左边柱各结点力矩不能满足平衡条件，这是由于柱两端弯矩两次累加的结果。就本题而言 A_2 结点差值较大，必要时可再分配一次。

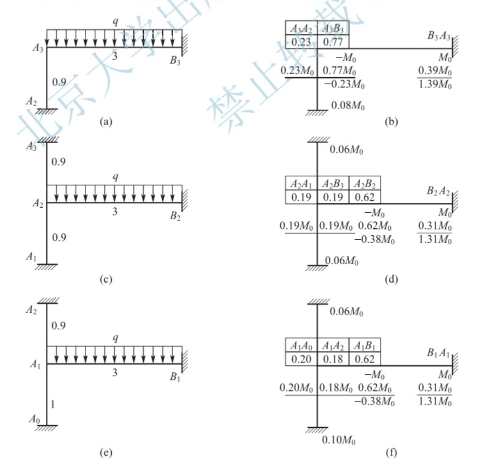


图 10.10

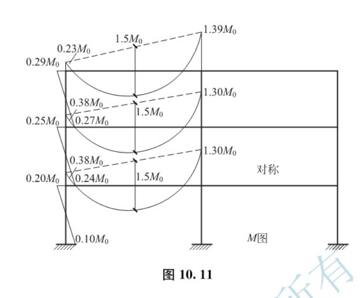


图 10. 11

10. 3 反弯点法

作多层多跨刚架在水平结点荷载(风载或地震力)作用下的弯矩图，最粗略的方法是反弯点法。这种方法虽然不够精确但作图十分简单，在进行结构的初步设计时是一种很有效的方法。该方法的最基本假设是认为所有横梁的刚度同柱相比可视作无限大。这一假设当梁的线刚度大于 3 倍柱的线刚度时比较准确。按照这一假设，刚架在发生侧移时，各个刚结点均不发生转动，故每一柱的反弯点(弯矩为零的点)均位于柱的中点［图 10.12(a)］。将第 i 层第 j 根柱取出，并自反弯点处将柱截断［图 10.12(b)］，由于弯矩为零，因此只有剪力 V_{ij} 存在(轴力与弯矩无关)，此时柱的弯矩就成为图 10.12(b)所示的斜直线，有

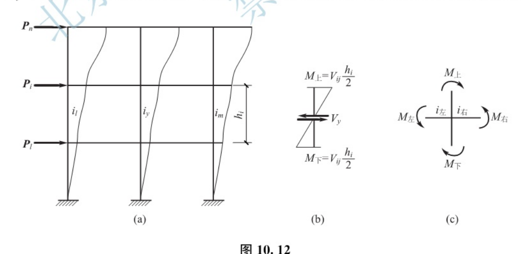


图 10. 12

$$M_{上}=V_{ij}\times\frac{h_i}{2},\ M_{下}=V_{ij}\times\frac{h_i}{2}$$

式中，h_i为第 i 层的层高。由此看出只要求出柱的剪力，则柱的弯矩立即可以得到。当所有柱的弯矩均为已知时，梁的弯矩可以通过结点平衡求出，如图 10.12(c)所示，当柱端弯矩求出后，根据结点力矩平衡，有

$$M_{左}+M_{右}=M_{上}+M_{下}$$

$M_{左}$与$M_{右}$的值应按梁的线刚度分配，有

$$\left.\begin{aligned} M_{左}=\frac{i_{左}}{i_{左}+i_{右}}(M_{上}+M_{下}) \\ M_{右}=\frac{i_{右}}{i_{左}+i_{右}}(M_{上}+M_{下}) \end{aligned}\right\} \tag{10-6}$$

现在解决每根柱的剪力如何确定的问题。当水平结点荷载P_i给出后，各楼层的剪力V_i自上向下便可得出，有

$$V_i=\sum_i^n P_i \tag{10-7}$$

楼层剪力应分配到每一根柱上，分配应按柱的线刚度值进行，分配给i层j根柱上的剪力应为：

$$V_{ij}=\frac{i_{ij}}{\sum i_{ij}}V_i \tag{10-8}$$

式中，i_{ij}为i层j根柱的线刚度，而$\sum i_{ij}$为i层柱线刚度的总和。之所以能如此分配是由于i层各柱的相对侧移量Δ完全相同，根据结点无转角发生，每根柱端弯矩均为$-\frac{6i_{ij}}{h_i}$，且上下两端相等，所以每根柱的剪力均为$\frac{12i_{ij}}{h_i^2}$，因为h_i^2为常量，故各柱剪力均与其线刚度i_{ij}成正比，所以剪力应按线刚度分配。

最后尚需说明的是，首层柱的反弯点位置，由于支座为固定端，而一层横梁的刚度相对支座而言又只能视为有限值，如果横梁刚度非常小时，则柱的反弯点要趋向一层顶部，而横梁刚度非常大时，反弯点位置又趋向一层的中部，所以一层柱的反弯点位置应在h_1与$0.5h_1$之间，通常取$2/3h_1$作为近似值。

【例 10-6】 用反弯点法作图 10.13 所示刚架的弯矩图。

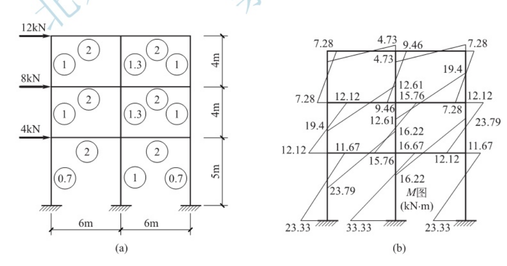


图 10.13

解：(1) 求楼层剪力。

$$V_3=12\text{kN},\quad V_2=12+8=20\text{kN},\quad V_1=20+4=24\text{kN}$$

(2) 求各层各柱剪力。

$$V_{3左}=V_{3右}=\frac{1}{1+1.3+1}\times 12=3.64\text{kN}，\quad V_{3中}=\frac{1.3}{3.3}\times 12=4.73\text{kN}$$

$$V_{2左}=V_{2右}=\frac{1}{1+1.3+1}\times 20=6.06\text{kN}，\quad V_{2中}=\frac{1.3}{3.3}\times 20=7.88\text{kN}$$

$$V_{1左}=V_{1右}=\frac{0.7}{0.7+1+0.7}\times 24=7\text{kN}，\quad V_{1中}=\frac{1}{2.4}\times 24=10\text{kN}$$

(3) 求各层各柱杆端弯矩。

$$M_{3左上}=M_{3左下}=M_{3右上}=M_{3右下}=3.64\times 2=7.28\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{3中上}=M_{3中下}=4.73\times 2=9.46\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{2左上}=M_{2左下}=M_{2右上}=M_{2右下}=6.06\times 2=12.12\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{2中上}=M_{2中下}=7.88\times 2=15.76\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{1左上}=M_{1右上}=7\times\frac{5}{3}=11.67\text{kN}\cdot\text{m}，\quad M_{1左下}=M_{1右下}=7\times\frac{10}{3}=23.33\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{1中上}=10\times\frac{5}{3}=16.67\text{kN}\cdot\text{m}，\quad M_{1中下}=10\times\frac{10}{3}=33.33\text{kN}\cdot\text{m}$$

柱的弯矩图如图 10.13(b)所示。

(4) 根据结点平衡求横梁杆端弯矩。

以首层中部结点为例，梁端弯矩：

$$M_{1中左}=M_{1中右}=\frac{1}{2}\times(15.76+16.67)=16.22\text{kN}\cdot\text{m}$$

梁的弯矩图如图 10.13(b)所示。

10.4 D 值法

反弯点法比较适合于强梁弱柱(梁线刚度远大于柱的线刚度)的情况，但从抗震角度出发，希望框架是强柱弱梁(梁柱线刚度相互接近，或柱的线刚度大于梁的线刚度)，此时再应用反弯点法误差就会很大。D 值法也是用来计算多层多跨刚架在水平结点荷载作用下的内力的，但它抛弃了横梁刚度无限大的假设，认为每一刚结点都会发生转动和侧移。它所取的基本假设是，规则框架的所有刚结点均发生同一个转角 φ 和同一个相对水平侧移 Δ。所谓规则框架是指跨度相同，层高相等，所有梁的线刚度 i_b 全相等，所有柱的线刚度 i_z 全相等的刚架，以这种刚架为基础，D 值法给出了求每根柱剪力的方法，和确定每根柱反弯点(弯矩为零)位置的计算表格，从而使弯矩图的得出与反弯点法基本相同，但准确度却比反弯点法高得多。

D 值法的关键在于 D 值的概念，所谓某根柱的 D 值是指该柱上下端发生单位相对位移时的杆端剪力值，此值又称为柱的侧移刚度或抗推刚度。如果第 i 层第 j 根柱剪力为 V_{ij} 而柱发生的实际相对侧移为 Δ_i(图 10.14)，该柱的 D 值用 D_{ij} 表示，则根据上述定义，有

$$D_{ij}=\frac{V_{ij}}{\Delta_i}\quad 或\quad V_{ij}=D_{ij}\Delta_i \tag{a}$$

考虑到 i 层各柱剪力之和应等于该层总剪力，并且各柱侧移量应相等(横梁长不变)，则有

$$V_i=\sum V_{ij}=\sum D_{ij}\Delta_i=\Delta_i\sum D_{ij}$$

可以得到

$$\Delta_i=\frac{V_i}{\sum D_{ij}} \tag{b}$$

将式(b)代回式(a)，有

$$V_{ij}=\frac{D_{ij}}{\sum D_{ij}}V_i \tag{10-9}$$

式(10－9)表明各柱剪力是按其 D 值的大小进行分配的，因此只要有了各柱的 D 值，各柱的剪力就可确定，同时还可通过式(a)或式(b)求得各楼层的相对侧移量。

i 层 j 根柱的侧移刚度 D_{ij} 可以参照图 10.14(b)所示结果，通过转角位移方程得到。由于规则框架各结点转角相同的假设，因此柱两端转角均应取 φ，将 φ 与 Δ_i 代入转角位移方程，得到

$$M_{上}=M_{下}=6i_z\varphi-\frac{6i_z}{h_i}\Delta_i$$

$$V_{ij}=-\frac{M_{上}+M_{下}}{h_i}=\frac{12i_z}{h_i^2}(\Delta_i-\varphi h_i) \tag{c}$$

考虑式(a)，有

$$D_{ij}=\frac{V_{ij}}{\Delta_i}=\frac{12i_z}{h_i^2}\left(1-\frac{\varphi h_i}{\Delta_i}\right) \tag{d}$$

为了得到 D_{ij} 尚需确定$\frac{\varphi h_i}{\Delta_i}$的值。

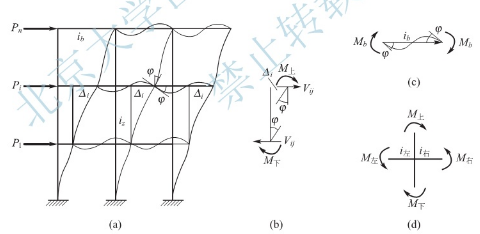


图 10.14

根据转角相等的假设，考虑图 10.14(c)有

$$M_b=6i_b\varphi \tag{e}$$

利用结点平衡［图 10.14(d)］，注意到规则框架的特点，不仅所有结点转角相同，而且各层相对侧移也相等，因此上层的 $M_{下}$ 与下层的 $M_{上}$ 具有相同的值。因此可得

$$2M_{上}+2M_b=12(i_z+i_b)\varphi-\frac{12i_z}{h_i}\Delta_i=0$$

得到

$$\frac{\varphi h_i}{\Delta_i}=\frac{i_z}{i_z+i_b} \tag{f}$$

代入式(d)，求得

$$D_{ij}=\frac{12i_z}{h_i^{\ 2}}\frac{i_b}{i_z+i_b}=\frac{12i_z}{h_i^{\ 2}}\frac{2\ \frac{i_b}{i_z}}{2+2\ \frac{i_b}{i_z}}=\frac{\overline{K}}{2+\overline{K}}\frac{12i_z}{h_i^{\ 2}}=\alpha\ \frac{12i_z}{h_i^{\ 2}} \tag{10-10}$$

式中

$$\alpha=\frac{\overline{K}}{2+\overline{K}} \tag{10-11}$$

体现了结点转角对 D 值的影响，因为 $\alpha=1$ 时恰好相当于无转角(横梁刚度无限大)时的侧移刚度。式中

$$\overline{K}=2\ \frac{i_b}{i_z} \tag{10-12}$$

体现了梁与柱线刚度之间的比值关系，但又不是纯比值。

在进行实际结构计算时，梁的线刚度可能不相等，此时一般取平均值，具体计算 α 值可遵照表 10－1 进行。还需说明的是，表 10－1 中首层公式与一般层有所不同，是由于首层支座处是没有转角发生的缘故。证明从略。

表 10－1　α 值计算公式表

层	边柱	中间柱	α
一般层	i_1，i_z，i_2 $\overline{K}=\frac{i_1+i_2}{2i_z}$	i_1，i_2，i_z，i_3，i_4 $\overline{K}=\frac{i_1+i_2+i_3+i_4}{2i_z}$	$\alpha=\frac{\overline{K}}{2+\overline{K}}$
首层	i_1，i_z $\overline{K}=\frac{i_1}{i_z}$	i_1，i_2，i_z $\overline{K}=\frac{i_1+i_2}{i_z}$	$\alpha=\frac{0.5+\overline{K}}{2+\overline{K}}$

应用 D 值能够计算出每根柱的剪力值，但要得到弯矩图还必须给出柱的反弯点位置，D 值法从它的基本假设出发，通过对称性的利用可以把规则框架最后简化为如图 10.15 所示的刚架，然后采用力法可以得到准确的弯矩图，就不同层的柱而言，只要 $M_下$ 与剪力 V 为已知，则反弯点高度 y 就可反求出。

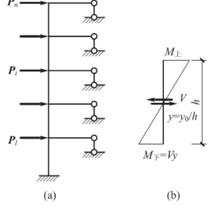


图 10.15

为了便于制表，可取反弯点高度比 $y_0=\frac{y}{h}$，其值为：

$$y_0=\frac{M_下}{Vh}$$

根据不同的结点水平荷载不同层数的框架和不同的

$\overline{K}$，通过计算后，制成一系列表格，计算时直接查表 10－2 或表 10－3 即可得到标准的反弯点高度比。表 10－2 对应于风荷载(均匀分布的水平结点力)；表 10－3 对应于地震作用(倒三角形分布的水平结点力)。由于实际结构与规则框架的差别，当上下梁的线刚度不同时或上层层高与下层层高同本层层高不同时，可按给出的表 10－4 和表 10－5 进行标准反弯点高度比的修正。以 y_1 表示梁线刚度不同引起的修正值，y_2、y_3 分别表示上层层高和下层层高与本层不同时引起的修正值，这样，总的反弯点高度比若用$\bar{y}$表示，则有

$$\bar{y}=y_0+y_1+y_2+y_3 \tag{10-13}$$

确定了柱的反弯点高度比后，通过式(10－14)

$$M_{下}=V\bar{y}h \text{ 和 } M_{上}=V(1-\bar{y})h \tag{10-14}$$

便可求得柱杆端弯矩，其余弯矩图绘制方法和反弯点法相同。

表 10－2　均布水平荷载下各层柱标准反弯点高度比 y_0

m	n \ $\overline{K}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1	1	0.80	0.75	0.70	0.65	0.65	0.60	0.60	0.60	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55
2	2	0.45	0.40	0.35	0.35	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45
	1	0.95	0.80	0.75	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.60	0.60	0.55	0.55	0.55	0.50
3	3	0.15	0.20	0.20	0.25	0.30	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	2	0.55	0.50	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	1	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55
4	4	−0.05	0.05	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	3	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	2	0.65	0.55	0.50	0.50	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.10	0.90	0.80	0.75	0.70	0.70	0.55	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55
5	5	−0.20	0.00	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	4	0.10	0.20	0.25	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50
	3	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.65	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.20	0.95	0.80	0.75	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55	0.55
6	6	−0.30	0.00	0.10	0.20	0.25	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	5	0.00	0.20	0.25	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50
	4	0.20	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	3	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.70	0.60	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.20	0.95	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55	0.55

（续）

m	n \ $\overline{K}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
7	7	−0.35	−0.05	0.10	0.20	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	6	−0.10	0.15	0.25	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50
	5	0.10	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.50	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.75	0.60	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.20	0.95	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55	0.55
8	8	−0.35	−0.15	0.10	0.10	0.25	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	7	−0.10	0.15	0.25	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.50	0.50	0.50
	6	0.05	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	5	0.20	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.50	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.75	0.60	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.20	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55	0.55
9	9	−0.40	−0.05	0.10	0.20	0.25	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.45	0.45	0.45	0.45
	8	−0.15	0.15	0.25	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50
	7	0.05	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	6	0.15	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.25	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.55	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.80	0.65	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.20	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55	0.55
10	10	−0.40	−0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.30	0.30	0.30	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	9	−0.15	0.15	0.25	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50
	8	0.00	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.40	0.50	0.50
	7	0.10	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.20	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.30	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.55	0.50	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.80	0.65	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.30	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55

（续）

m	$\overline{K}$ / n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
11	11	-0.40	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	10	-0.15	0.15	0.25	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50
	9	0.00	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	8	0.10	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	7	0.20	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.25	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.80	0.65	0.60	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.30	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
12以上	自上1	-0.40	-0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	2	-0.15	0.15	0.25	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50
	3	0.00	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.10	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.20	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.25	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	7	0.30	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	8	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	中间	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.60	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.80	0.65	0.60	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	自下1	1.30	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55

表 10-3　倒三角形荷载下各层柱标准反弯点高度比 y_0

m	$\overline{K}$ / n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1	1	0.80	0.75	0.70	0.65	0.65	0.60	0.60	0.60	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55
2	2	0.50	0.45	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50
	1	1.00	0.85	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55

（续）

m	n \ $\overline{K}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
3	3	0.25	0.25	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.50
	2	0.60	0.50	0.50	0.50	0.50	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.15	0.90	0.80	0.75	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
4	4	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45
	3	0.35	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	2	0.70	0.60	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.20	0.95	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55	0.50
5	5	-0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	4	0.20	0.25	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	3	0.45	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.75	0.60	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.30	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55
6	6	-0.15	0.05	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	5	0.10	0.25	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	4	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.50	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.80	0.65	0.55	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.30	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
7	7	-0.20	0.05	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45
	6	0.05	0.20	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	5	0.20	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.80	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.30	1.00	0.90	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
8	8	-0.20	0.05	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.45	0.45	0.45	0.45
	7	0.00	0.20	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	6	0.15	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.30	0.45	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.60	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.85	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.30	1.00	0.90	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55

（续）

m	n \ $\overline{K}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
9	9	-0.25	0.00	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45
	8	0.00	0.20	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	7	0.15	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.25	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.45	0.45	0.05	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.65	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.80	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.35	1.00	1.00	0.80	0.75	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
10	10	-0.25	0.00	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45
	9	-0.05	0.20	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	8	0.10	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	7	0.20	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.30	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.50	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.60	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.85	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.35	1.00	0.90	0.80	0.75	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
11	11	-0.25	0.00	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.30	0.35	0.35	0.45	0.45	0.45	0.45
	10	-0.05	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	9	0.10	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	8	0.20	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	7	0.25	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.40	0.44	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.65	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.85	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.35	1.50	0.90	0.80	0.75	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55

（续）

m	$\overline{K}$ / n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
12以上	自上1	−0.30	0.00	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	2	−0.10	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.50
	3	0.05	0.25	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	4	0.15	0.30	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	5	0.25	0.30	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.30	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	7	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	8	0.35	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	中间	0.45	0.45	0.50	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.65	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.70	0.70	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	自下1	1.35	1.05	0.70	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55

表 10－4　上下梁相对刚度变化时的修正值 y_1

$\overline{K}$ / α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
0.4	0.55	0.40	0.30	0.25	0.20	0.20	0.20	0.15	0.15	0.15	0.05	0.05	0.05	0.05
0.5	0.45	0.30	0.20	0.20	0.15	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05
0.6	0.30	0.20	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.00	0.00
0.7	0.20	0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.00	0.00	0.00
0.8	0.15	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.9	0.05	0.05	0.05	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

注：对于底层柱不考虑 α_1 值，所以不作此项修正。

表 10－5　上下柱高度变化时的修正值 y_2 和 y_3

α_2	$\overline{K}$ / α_3	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
2.0		0.25	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0
1.8		0.20	0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0
1.6	0.4	0.15	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0
1.4	0.6	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

（续）

α_2	$\overline{K}$ / α_3	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1.2	0.8	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.8	1.2	−0.05	−0.05	−0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.6	1.4	−0.10	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	0.0	0.0	0.0	0.0
0.4	1.6	−0.15	−0.10	−0.10	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	0.0	0.0	0.0	0.0
	1.8	−0.20	−0.15	−0.10	−0.10	−0.10	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	0.0	0.0	0.0
	2.0	−0.25	−0.15	−0.15	−0.10	−0.10	−0.10	−0.10	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	0.0	0.0

注：y_2 按 α_2 查表求得，上层较高时为正值。但对于最上层，不考虑 y_2 修正值。y_3 按 α_3 查表求得，对于最下层，不考虑 y_3 修正值。

【例 10－7】 用 D 值法解例 10－6 所示刚架(图 10.16)，并作弯矩图。

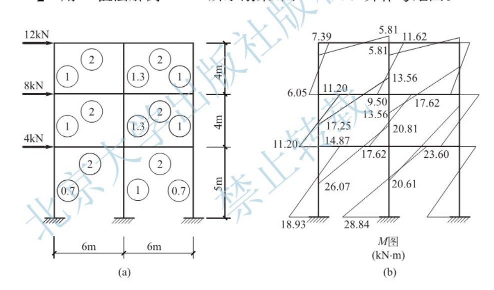


图 10.16

解：(1) 各层柱 D 值的计算(见表格 10－6 与表 10－7)

表 10－6　2～3 层 D 值计算

柱	$\overline{K}=\frac{\sum i_b}{2i_z}$	$\alpha=\frac{\overline{K}}{2+\overline{K}}$	$D=\alpha i_z\frac{12}{h^2}$
边柱	$\frac{2+2}{2\times1}=2$	$\frac{2}{2+2}=0.5$	$0.5\times1\times\frac{12}{4^2}=0.375$
中间柱	$\frac{2\times4}{2\times1.3}=3.08$	$\frac{3.08}{2+3.08}=0.606$	$0.606\times1.3\times\frac{12}{4^2}=0.591$

2～3 层总 D 值为：

$$\sum D=2\times0.375+0.591=1.341$$

表 10-7 首层 D 值计算

柱	$\overline{K}=\frac{\sum i_b}{i_z}$	$\alpha=\frac{0.5+\overline{K}}{2+\overline{K}}$	$D=\alpha i_z\frac{12}{h^2}$
边柱	$\frac{2}{0.7}=2.86$	$\frac{0.5+2.86}{2+2.86}=0.691$	$0.691\times0.7\times\frac{12}{5^2}=0.232$
中间柱	$\frac{2+2}{1}=4$	$\frac{0.5+4}{2+4}=0.75$	$0.75\times1\times\frac{12}{5^2}=0.36$

首层总 D 值为：

$$\sum D=2\times0.232+0.36=0.824$$

(2) 各柱弯矩的计算见表 10-8。

表 10-8 柱弯矩计算表

层	柱	V_i	$\sum D_{ij}$	D_{ij}	$V_{ij}=\frac{D_{ij}}{\sum D_{ij}}V_i$	$\overline{K}$	$\overline{y}$	$M_上$	$M_下$
3层	边柱	12	1.341	0.375	3.36	2	0.45	7.39	6.05
	中柱			0.591	5.28	3.08	0.45	11.62	9.50
2层	边柱	20	1.341	0.375	5.60	2	0.50	11.20	11.20
	中间柱			0.591	8.81	3.08	0.50	17.62	17.62
首层	边柱	24	0.824	0.232	6.76	2.86	0.56	14.87	18.93
	中柱			0.36	10.49	4	0.55	23.60	28.84

以 3 层边柱为例，该层总剪力 $V_3=12\text{kN}$，总 D 值为 1.341，边柱 D 值为 0.375，因此

$$V_{3边}=\frac{0.375}{1.341}\times12=3.36\text{kN}$$

由 D 值计算表中查得 3 层边柱$\overline{K}=2$，利用表 10-3(倒三角形荷载作用下的标准反弯点高度比)查出 3 层框架第 3 层的 y_0值为 0.45，这根柱的 y_0值按所给条件可不进行修正，故$\overline{y}=y_0=0.45$，最后得到这根柱的下、上端弯矩：

$$M_下=3.36\times0.45\times4=6.05\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_上=3.36\times0.55\times4=7.39\text{kN}\cdot\text{m}$$

(3) 柱的弯矩得出后，梁的弯矩与反弯点法相同，可由结点平衡求出。最后弯矩图示于图 10.17(b)。

将 D 值法所得结果［图 10.16(b)］与反弯点法所得结果［图 10.13(b)］对比，可以看出，2 层弯矩值较为接近，但首层与 3 层差别较大，这正是反弯点法不足之处。

10.5 剪力分配法

等高多跨的单层工业厂房排架［图 10.17(a)］虽然属于多次超静定结构，但应用位移

法，则只要解一个未知量便可得到内力，而且可以将其结果转化成剪力分配的形式，这是单层厂房手算中经常采用的方法。图 10.17(b)为用位移法解等高排架的基本结构，当顶部有水平集中力 P 作用时，则

$$R_{1P}=-P$$

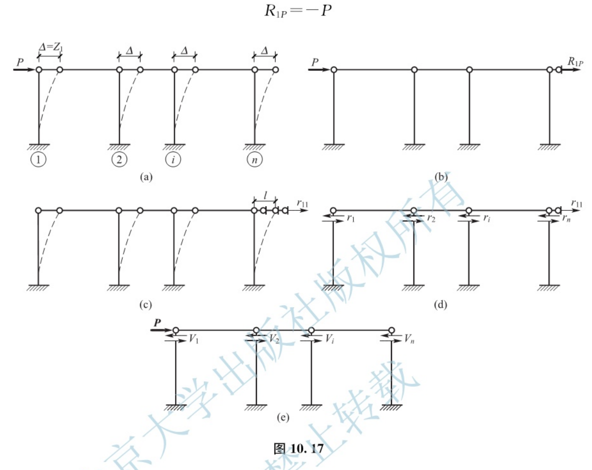


图 10.17

此时各柱均无剪力，图 10.17(c)为求 r_{11} 的位移图，如果第 i 根柱顶部发生单位位移所需的剪力为 r_i [图 10.17(d)]，则

$$r_{11}=\sum_{i=1}^{n}r_i \tag{10-15}$$

代入位移法方程 $$Z_1=-\frac{-P}{\sum_{i=1}^{n}r_i}=\frac{P}{\sum_{i=1}^{n}r_i}$$

第 i 根柱在 P 力作用下最后得剪力应为：

$$V_i=r_iZ_1,\quad V_i=r_iZ_1=\frac{r_i}{\sum_{i=1}^{n}r_i}P=\eta_iP$$

式中

$$\eta_i=\frac{r_i}{\sum_{i=1}^{n}r_i} \tag{10-16}$$

称为剪力分配系数，r_i称为柱的侧移刚度，因此在等高排架计算中，各柱剪力是按侧移刚度分配的 [图 10.17(e)]。侧移刚度 r_i可以通过力法中的柔度 δ_i求出。

图 10.18(a)表示出了刚度系数的概念，而图 10.18(b)表示出了柔度系数的概念，它们之间存在着互为倒数的关系。将此关系代入式(10-16)，有

$$\eta_i = \frac{\frac{1}{\delta_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta_i}} \qquad (10-17)$$

当单层厂房各柱剪力得到后，柱的弯矩图便可很快作出。

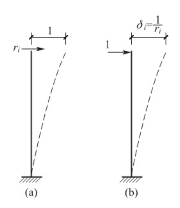


图 10.18

【例 10-8】　用剪力分配法计算图 10.19 所示铰接排架各柱的剪力，已知 $P=5.75\text{kN}$，$I_1=2.13\times10^{-3}\text{m}^4$，$I_2=12.31\times10^{-3}\text{m}^4$，$I_3=7.2\times10^{-3}\text{m}^4$。

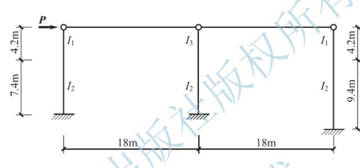


图 10.19

解：首先根据力法解排架中所提供的有关公式计算各柱顶的柔度系数，有

$$\delta_{aa}=k_3\frac{H^3}{EI_2}=\frac{1}{3}(1+\mu\lambda^3)\frac{H^3}{EI_2}$$

$$\mu=\frac{1}{n}-1,\quad n=\frac{I_1}{I_2},\quad \lambda=\frac{H_1}{H}$$

左柱(柱 1)的柔度：

$$\lambda=\frac{4.2}{11.6}=0.362,\quad n=\frac{2.13\times10^{-3}}{12.31\times10^{-3}}=0.173,\quad \mu=\frac{1}{0.173}-1=4.78$$

$$k_3=\frac{1}{3}(1+4.78\times0.362^3)=0.409$$

$$\delta_1=0.409\times\frac{11.6^3}{EI_2}=\frac{638}{EI_2}$$

中柱(柱 2)的柔度：

$$\lambda=0.362,\quad n=\frac{7.2\times10^{-3}}{12.3\times10^{-3}}=0.585,\quad \mu=\frac{1}{0.585}-1=0.709$$

$$k_3=\frac{1}{3}(1+0.709\times0.362^3)=0.345$$

$$\delta_2=0.345\times\frac{11.6^3}{EI_2}=\frac{538}{EI_2}$$

右柱(柱 3)的柔度：

$$\lambda=\frac{4.2}{13.6}=0.309,\quad n=\frac{2.13\times10^{-3}}{12.31\times10^{-3}}=0.173,\quad \mu=\frac{1}{0.173}-1=4.78$$

$$k_3=\frac{1}{3}(1+4.78\times0.309^3)=0.380$$

$$\delta_3=0.380\times\frac{13.6^3}{EI_2}=956/EI_2$$

根据式(10－17)计算各柱剪力分配系数，有

$$\eta_1=\frac{\frac{1}{638}}{\frac{1}{638}+\frac{1}{538}+\frac{1}{956}}=\frac{1.56\times10^{-3}}{4.47\times10^{-3}}=0.349$$

$$\eta_2=\frac{\frac{1}{538}}{4.47\times10^{-3}}=0.416$$

$$\eta_2=\frac{\frac{1}{956}}{4.47\times10^{-3}}=0.235$$

各柱分配剪力：

$$V_1=0.349\times5.75=2.01\text{kN}$$
$$V_2=0.416\times5.75=2.39\text{kN}$$
$$V_3=0.235\times5.75=1.35\text{kN}$$

10.6 框-剪结构受力分析的连续化方法

图 10.20(a)为框-剪(或框-墙)结构的一种计算简图，它是将某方向所有剪力墙合为一道剪力墙，以 EI_W代表各剪力墙刚度的总和，将该方向所有框架，合并为一个框架，各层楼板视为刚性板，它的作用是将框架与剪力墙在楼板处相连使其发生相同的水平侧移，这里采用铰接杆代替楼板作用，这种体系称为铰接体系(还有刚结体系)。这种计算简图属于高次超静定结构，除采用电算外，手算方法多采用“连续化”方法，以避免复杂的运算。这是一种建立和求解微分方程的方法，当所需的位移与内力函数求得后可以制成通用表格以备设计人员使用。本节仅介绍“连续化”的基本概念及其求解方法，具体计算由于涉及因素太多，此处从略，读者可以参看有关高层建筑结构计算和建筑物抗震设计等方面的书籍。

所谓“连续化”假设，就是将图 10.20(a)所示计算简图改变成图 10.20(b)所示的形式，或者说，假设链杆是连续分布在整个框架与剪力墙中间，这种假设对整体受力影响不大，这样假设后，剪力墙在荷载作用下的位移曲线与框架柱的位移曲线将完全相同。如图 10.20(c)所示，在水平荷载 $q(x)$作用下，将所有链杆截断，并以未知的连续分布力 $p(x)$代替链杆的作用，则框-剪体系可以视为两个单独受力部分。左边部分剪力墙在 $q(x)$与 $p(x)$作用下产生弯曲变形，可由悬臂构件计算。根据变形协调条件，剪力墙与框架在相连接的部位沿 y 方向应产生相同的水平位移，即两者的弹性曲线要相同。将梁的近似弹性曲线微分方程 $EI_W y''=-M(x)$求二阶导数，并注意到 $M''(x)=-q(x)+p(x)$，可建立起

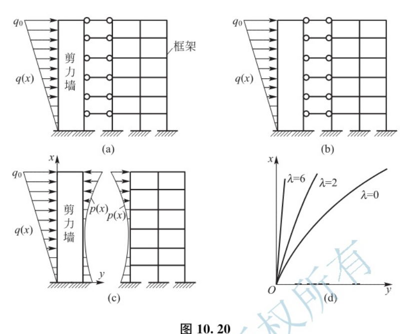


图 10.20

$$EI_{\mathrm{W}}\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}=q(x)-p(x) \tag{10-18}$$

式中，$y=f(x)$为剪力墙的弹性曲线方程。如果此微分方程能够解出，则剪力墙的内力可由下列各式得出：

$$\left.\begin{aligned} M_{\mathrm{W}}&=-EI_{\mathrm{W}}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \\ V_{\mathrm{W}}&=-EI_{\mathrm{W}}\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}\end{aligned}\right\} \tag{10-19}$$

式中，M_{W}与V_{W}为剪力墙的弯矩方程与剪力方程。不过方程(10-19)中尚含有未知力$p(x)$，它与剪力墙位移的关系尚不清楚，因此方程(10-19)暂时还不能求解。$p(x)$不仅和剪力墙受力有关，同时也与框架受力有关。按D值法解框架时，由于$p(x)$相对水平荷载，因此它必与层间剪力V_i有关，而V_i又与层间相对位移Δu_i有关，相对位移与层高之比从几何上考虑又是框架弹性曲线的层间转角，即$\theta_i=\Delta u_i/h_i$。当引入连续化假设后，此式即变为$\theta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。由于这里的位移$y$既是框架的又是属于剪力墙的。

这样便可找到$p(x)$与y的又一关系，根据剪力与荷载集度间的微分关系，有式(10-20)成立：

$$p(x)=-\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}x} \tag{10-20}$$

式中，V_{f}为框架剪力。D值法中曾提供了楼层剪力与位移的关系：

$$V_i=\Delta u_i\left(\sum D_{ij}\right) \tag{10-21}$$

将$\Delta u_i=\theta_i h_i$代入式(10-21)，得到

$$V_i=\left(\sum h_i D_{ij}\right)\theta_i \tag{10-22}$$

引入连续化假设后，式(10-22)化为：

$$V_{\mathrm{f}}=\left(\sum hD_j\right)\theta=C_{\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{10-23}$$

对式(10-23)求一阶导数并代入式(10-20)，有

$$p(x)=-\frac{dV_f}{dx}=-C_f\frac{d^2y}{dx^2} \tag{10-24}$$

这就是 $p(x)$ 与位移 y 之间的微分关系。其中 C_f 称为框架的等效剪切刚度，有

$$C_f=\sum_{j=1}^{n}hD_j$$

当各层 D 值与层高不等时，取各层 C_f 沿竖向高度的加权平均值。

将式(10-24)代入式(10-18)，得到

$$EI_W\frac{d^4y}{dx^4}-C_f\frac{d^2y}{dx^2}=q(x) \tag{10-25}$$

令

$$\frac{EI_W}{C_f}=s^2 \tag{10-26}$$

则式(10-25)可化为：

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{1}{s}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{C_fs^2}q(x) \tag{10-27}$$

方程(10-27)即为框-剪结构协同工作的基本方程。由于框架与剪力墙间用铰接链杆连接，且基本方程中以线位移 y 为未知函数，因此又称方程(10-27)为“铰接体系线变方程”。解此方程求得位移函数 y 后，即可由式(10-21)和式(10-22)求得剪力墙与框架的内力。

在框-剪结构的抗震设计中，地震作用一般均按倒三角形荷载处理，此时方程(10-27)右端 $q(x)=q_0\frac{x}{H}$，此处 q_0 为顶点集度，H 为剪力墙总高。代入方程(10-27)，有

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{1}{s}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{C_fs^2}q_0\frac{x}{H} \tag{10-28}$$

此方程属于四阶线性常系数非齐次常微分方程，其通解取如下形式：

$$y=A\text{sh}\lambda\varepsilon+B\text{ch}\lambda\varepsilon+C+Dx-\frac{q_0x^3}{6HC_f} \tag{10-29}$$

$$\lambda=\frac{H}{s}=H\sqrt{\frac{C_f}{EI_W}}$$

$$\varepsilon=x/H$$

式中，λ 为结构体系的刚度特征系数；ε 为相对高度。

利用边界条件确定常数 A，B，C，D 后，得到位移函数

$$y=\frac{11q_0H^4}{120EI_W}k_1 \tag{10-30}$$

$$k_1=\frac{120}{11}\frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{\text{sh}\lambda}{2\lambda}-\frac{\text{sh}\lambda}{\lambda^3}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\text{ch}\lambda\varepsilon-1}{\text{ch}\lambda}\right)+\left(\varepsilon-\frac{\text{sh}\lambda\varepsilon}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)-\frac{\varepsilon^3}{6}\right]$$

位移函数获得后，剪力墙与框架内力可分别求出：

$$M_W=-EI_W\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q_0H^2}{3}k_2$$

$$k_2=\frac{3}{\lambda^3}\left[\left(\frac{\lambda^2\text{sh}\lambda}{2}-\text{sh}\lambda+\lambda\right)\frac{\text{ch}\lambda\varepsilon}{\text{ch}\lambda}-\left(\frac{\lambda^2}{2}-1\right)\text{sh}\lambda\varepsilon-\lambda\varepsilon\right]$$

$$V_W=-EI_W\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{2}q_0Hk_3$$

$$k_3=-\frac{2}{\lambda^2}\left[\left(\frac{\lambda^2\mathrm{sh}\lambda}{2}-\mathrm{sh}\lambda+\lambda\right)\frac{\mathrm{sh}\lambda\varepsilon}{\mathrm{ch}\lambda}-\left(\frac{\lambda^2}{2}-1\right)\mathrm{ch}\lambda\varepsilon-1\right]$$

$$V_{\mathrm{f}}=C_{\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}q_0H\ [(1-\varepsilon^2)-k_3]$$

k_1、k_2、k_3三个函数均已制成表格，以便设计人员直接查用(本书表格从略)。

在结束本节内容时，我们再对结构刚度特征系数λ的概念及其对整个结构位移的影响加以说明。λ的计算式为：

$$\lambda=H\sqrt{\frac{C_{\mathrm{f}}}{EI_{\mathrm{W}}}} \tag{10-31}$$

式中，EI_{W}为剪力墙的总刚度；C_{f}为框架的总刚度(它与框架D值成正比)。

从式(10-31)可以看出λ的值体现了两者刚度的关系，λ越大表示框架部分起主要作用，而λ等于零则表示只有剪力墙而无框架。图10.20(d)给出了在倒三角形荷载作用下，$\lambda=0$、$\lambda=2$、$\lambda=6$三种情况下挠度曲线的对比图。$\lambda=0$代表了只有剪力墙而无框架时的挠曲线，此时与悬臂梁受倒三角形荷载作用所产生的挠曲线相同，属弯曲型；而$\lambda=6$相当于框架部分占有相当大的比重，其挠曲线属于剪切型；而$\lambda=2$介于两者之间，既有弯曲型又有剪切型属于剪弯型。

本节所述仅仅是“连续化”方法在框-剪结构受力分析中的一种最基本应用。这种“连续化”方法目前已有广泛的应用，它已在解决各种联肢墙、筒体结构以至网架结构等的受力分析中得到应用，并已扩展到结构动力特性的分析上。

10.7 静定结构与超静定结构特性的比较

在结构力学课程的学习中，至此已将静力的计算方法(除电算外)介绍完毕。整个课程中我们接触到两类结构的受力与变形分析问题，一类是静定结构，另一类是超静定结构。它们之间有着很多共同的特点，但两者又有一定区别，这些不同点在学习特别是使用结构力学知识时是应当加以注意的。

从几何组成角度考虑，静定结构是无多余联系的几何不变体系，而超静定结构是有多余联系的几何不变体系。就这点而言，静定结构一旦有一根杆件失去承载能力(或破坏，或失稳)将使整个体系成为几何可变体系，这意味着整体结构随之破坏。例如屋架，由于它基本上属于静定体系，因此只要一根拉(压)杆发生破坏，则往往会引起整个屋架的塌落。超静定结构由于有多余联系的存在，特别是多次超静定结构，即使发生几处局部破坏，只要整体还属于几何不变体系，就不会发生全面的破坏，例如多层框架结构在地震中哪怕有数根梁产生了屈服破坏，只要柱子大体能保证完好，大楼就绝不会倒塌。

有无多余联系是静定结构与超静定结构的根本区别，正是由于这一点，在结构的内力计算上产生了本质的区别。静定结构内力(不包括应力)分析之所以简单，就在于它只需考虑静力平衡条件而无需考虑结构的变形与位移。因此静定结构的内力分布与结构的材料性质和截面的几何性质是无关的。例如一根简支梁，不论它是钢梁、钢筋混凝土梁或是木梁，只要跨度给出，荷载给定，它的弯矩图和剪力图便可完全确定，而且结果是唯一的。超静定结构，由于多余约束的存在，使未知量的数目大于静力学所能提供的平衡方程个

数，因此仅就满足平衡方程而言，解答是无穷多的，这时附加的变形协调方程成为使解答唯一的不可缺少的条件。由于变形条件的引入，就使得超静定结构的内力分布与材料性质和截面几何性质有关。但是必须指出，在荷载作用下，超静定结构的内力一般只与相对刚度有关，而与绝对刚度无关，如果为同一种材料，只有一个弹性模量 E，则超静定内力计算结果中并不含有 E(相互消去)。例如等截面单跨超静定梁在荷载作用下，其固端弯矩只与荷载、荷载位置以及跨度有关，而与截面尺寸无关。就内力分布是否均匀这一点而言，超静定结构相对静定结构要优越一些，例如单跨简支梁受均布荷载作用，其最大弯矩为$\frac{1}{8}ql^2$，而两端固定的单跨梁在同样荷载作用下，支座最大负弯矩为$\frac{1}{12}ql^2$，跨中正弯矩只有$\frac{1}{24}ql^2$，这实质是由于两端约束将负弯矩增大的缘故。超静定结构中一般说来哪根构件相对刚度大，它吸收的分配内力也往往较大，这点还可用来人为地调整刚度比值而使内力分布均匀。在稳定问题中，约束增多承载力增大这也是一个重要规律，相同的柱采用两端固定比采用一端固定一端自由时稳定承载能力大 3 倍这就是一个很好的说明。

静定结构的某一几何不变部分作用有平衡力系时，仅在该部分引起内力，而对其他部分的内力包括反力没有影响。同理，静定结构的某一几何不变部分的力系用等效合力代替时，仅影响该部分的内力，而对其他部分的内力包括反力没有影响。同样，静定结构的某一几何不变部分用另一几何不变体系代替时，仅影响该部分的内力，而不影响结构其他部分的内力及反力。静定结构的刚性支座改为弹性支座及各杆件截面发生变化仅对结构的位移有影响而对结构的内力和反力没有影响。超静定结构在这几种情况下，除了对结构的位移有影响并且对结构的内力和反力也会有影响。

结构在非荷载因素影响下的效应，静定与超静定的差别就更加明显。温度改变、支座沉陷、制作误差等对静定结构而言是不产生内力的，其原因就在于静定结构无多余约束来限制这些位移与变形，使得这些变化完全是自由的。但超静定结构则恰好相反，多余约束的存在阻止了这些变形，因此使结构中产生了荷载以外引起的附加内力，支座的不均匀沉陷一般说来会使超静定结构产生相当大的内力与变形，严重时还会引起整个房屋倒塌。温度变化有时也会使房屋的墙体产生很大的裂缝，冻胀的结果有时会使地面甚至柱子抬起。所以在设计超静定结构时，这些因素都应充分考虑，给予妥善处理。

10.8 结构内力计算结果的简单判定

在掌握结构力学的多种计算方法和近似算法并能灵活运用的基础之上，对计算结果进行校核和定性判断，看其是否在合理范围之内，这是学习结构力学的较高层次，也是优秀工程师所应具有的能力。下面就以常见的结构弯矩图为例，叙述其判定方法。

对于图 10.21 所示对称结构，根据对称可绘出 M 图，A、B 端的 M 值可根据图 10.22(a)和(b)判定其合理范围：当两立柱的线刚度较横梁的线刚度趋于无限小时，两立柱对于横梁端处的转动约束趋于零，则弯矩图同图 10.22(a)所示，即等同于简支梁的弯矩图。当两立柱的线刚度较横梁的线刚度趋于无限大时，两立柱对于横梁端处的转动约束相当于固

定端，则弯矩图同图 10.22(b)所示，即等同于两端固定梁的弯矩图。而图 10.21 所示结构的两立柱的刚度既不是无限小也不是无限大，因此，A、B 端 M 值的合理范围应是在 0 和 $\frac{1}{12}ql^2$ 之间。

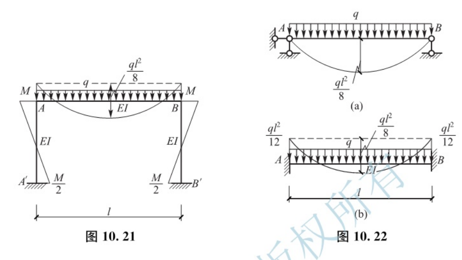


图 10.21　　图 10.22

图 10.23 所示排架结构，根据变形趋势可绘出 M 图，A 端的 M 值可根据图 10.24(a)和(b)判定其合理范围：当 CD、EF 柱的抗弯刚度较 AB 柱的抗弯刚度趋于无限小时，CD、EF 柱对于 AB 柱的帮助趋于零，则 AB 柱的弯矩图同图 10.24(a)所示，即等同于悬臂梁的弯矩图。当 CD、EF 柱的抗弯刚度较 AB 柱的抗弯刚度趋于无限大时，CD、EF 柱对于 AB 柱的帮助趋于固定铰支座，则 AB 柱的弯矩图同图 10.24(b)所示，即等同于一端固定、一端铰支的单跨超静定梁的弯矩图。而图 10.23 所示排架结构的 CD、EF 柱的抗弯刚度既不是无限小也不是无限大，因此，A 端 M 值的合理范围应是在$\frac{1}{2}ql^2$和$\frac{1}{8}ql^2$之间。

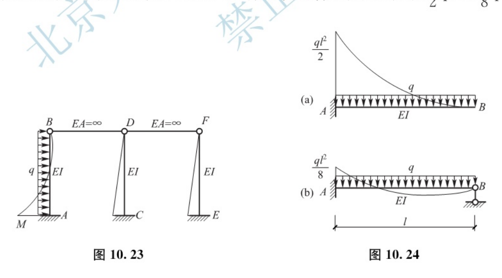
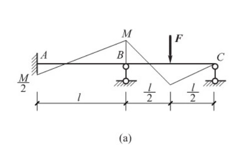


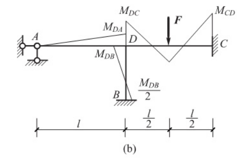
图 10.23　　图 10.24

图 10.25(a)所示连续梁 B 截面处的 M 值可根据表 9－1 中编号 6 的载常数来确定：由于梁 AB 段的线刚度是在无限小和无限大之间，因此，B 截面处的 M 值的合理范围应是在 0 和$\frac{3}{16}Fl$ 之间。

图 10.25(b)所示刚架 D 结点处的 M_{DC} 值可根据表 9－1 中编号 1 的载常数来确定：由于梁 AD 和柱 BD 的线刚度是在无限小和无限大之间，因此，M_{DC} 值的合理范围应是在 0



(a)



(b)

图 10.25

和$\frac{1}{8}Fl$之间，而M_{CD}值的合理范围应是在$\frac{3}{16}Fl$和$\frac{1}{8}Fl$之间。另外，M_{DA}与M_{DB}之和为M_{DC}值。

本 章 小 结

为避免直接求解大量的线性方程组，科学家创建了一些对结构进行简单计算的近似法或渐近法。对于多高层结构特别是框架体系，在竖向荷载作用下，一般可采用力矩分配法作弯矩图。当活荷载较大时，可采用分层法计算。对于在风荷载与地震力(水平)作用下的内力计算，可采用D值法，或更简单的但是较粗略的反弯点法。

本章主要讲述了力矩分配法，其中应用到了几个重要的概念：分配系数μ、杆端的转动刚度s、不平衡弯矩M^{F}和传递系数C，这也是力矩分配法的解题过程。计算出了各杆端的总弯矩后，即可通过区段叠加得到最终弯矩图。

本章还学习了分层法、反弯点法、D值法和剪力分配法等较适宜手算的近似方法，这些方法在应用时要注意其应用的条件，如反弯点法是适用框架结构在水平荷载作用时的情况。

最后，对静定结构与超静定结构的特性进行了讨论。从几何组成角度考虑，静定结构是无多余联系的几何不变体系，而超静定结构是有多余联系的几何不变体系。所以，静定结构一旦有一根杆件失去承载能力，整个体系将成为几何可变体系。超静定结构由于多余联系的存在，特别是多次超静定结构，即使发生几处局部破坏，只要整体还属于几何不变体系，就不会发生全面的破坏。

静定结构的内力分布与结构的材料性质、截面的几何性质是无关的。超静定结构的内力分布与材料的性质和截面几何性质有关。但是，在荷载作用下，超静定结构的内力一般只与相对刚度有关，而与绝对刚度无关。超静定结构中一般说来哪根构件相对刚度大，它吸收分配的内力往往也较大，利用这个特点，可以人为地调整刚度比值而使内力分布均匀。

结构在非荷载因素(温度改变、支座沉陷、制作误差等)的影响下，静定结构由于无多余约束来限制这些位移与变形，这些变化完全是自由的。所以，静定结构是不产生内力的。而超静定结构存在多余的约束，阻止了这些变形，因此使结构中产生了内力。工程中，支座的不均匀沉陷会使超静定结构产生相当大的内力与变形，温度变化有时也会使房

屋的墙体产生很大的裂缝，在设计超静定结构时应充分考虑这些因素并进行相应的处理。

关键术语

力矩分配法(moment distribution method)；刚臂(rigid arm)；转动刚度(rotation stiffness)；不平衡弯矩(out of balance moment)；分配弯矩(distrbution bending moment)；分配系数(distrbution factor)；传递弯矩(carry - over bending moment)；传递系数(carry - over coefficient)；分层法(sub - story computing method)；反弯点法(method of inflection point)。

习 题 10

一、思考题

1. 力矩分配法与位移法对于具有两个结点转角的刚架(无侧移)解题思路的区别何在?

2. 力矩分配法中为什么要反号分配? 它的力学意义是什么?

3. 在连续梁中竖向荷载引起的固端弯矩，其符号是否有什么规律可循?

4. 力矩分配法在解多层多跨刚架时其分配与传递最好如何进行?

5. 分层法中传递系数为什么要取 1/3?

6. 反弯点法中各柱剪力为什么要按线刚度大小分配?

7. D 值法中的基本假设是什么?

8. 计算 D 值公式中的 α 其力学意义何在?

9. D 值法中首层计算公式与一般层公式差别何在? 为什么会有此差别?

10. 剪力分配法计算排架，是根据什么物理量进行分配的? 顶点不等高的排架能否应用剪力分配法?

11. 框-剪结构分析中连续化假设的结果是什么? 推导公式过程中引入的 C_f，其力学意义何在?

12. 静定结构与超静定结构的主要区别是什么?

二、填空题

1. 力矩分配法的要点是：先________结点，求得荷载作用下的各杆的________，然后________结点，将结点上的________弯矩分配于各杆近端，同时求出远端传递弯矩。叠加各杆端的________、________、________，即得到实际的杆端弯矩。

2. 力矩分配法中，杆端的转动刚度不仅与该杆的________有关，而且与杆的远端________有关。

3. 力矩分配法适用于求解连续梁和____________刚架的内力。

4. 在力矩分配法中，传递系数 C 等于____________，对于远端固定杆，C 等于____________，对于远端滑动杆，C 等于____________。

5. 图 10.26 所示结构用力矩分配法计算的分配系数 $\mu_{AB}=$________，$\mu_{AC}=$________，$\mu_{AE}=$________。

6. 图 10.27 所示刚架用力矩分配法求解时，结点 C 的力矩分配系数之和等于________，杆 CB 的分配系数 $\mu_{CB}=$________。

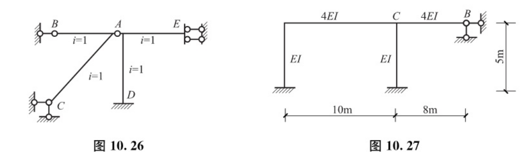


图 10.26　　图 10.27

三、判断题

1. 力矩分配法是以位移法为基础的渐近法。(　　)
2. 力矩分配法可以用来计算任何超静定刚架。(　　)
3. 在力矩分配法中，同一刚结点处各杆端的分配系数之和等于 1。(　　)
4. 具有一个刚结点角位移的结构，用力矩分配法计算的结果与用位移法得到的精确解是一致的。(　　)
5. 图 10.28 所示结构中各杆的 i 相同，欲使 A 结点产生 $\theta_A=1$ 的单位转角，需在 A 结点施加的外力偶为 $8i$。(　　)
6. 图 10.29(a)与(b)的 A 端转动刚度相同。(　　)

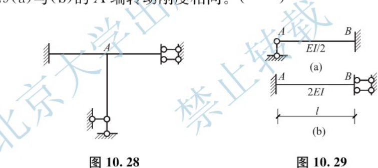


图 10.28　　图 10.29

7. 在任何情况下，力矩分配法的计算结果都是近似的。(　　)
8. 图 10.30 所示结构，结点 A 上作用有外力偶矩 M，则 $M_{AB}=0\times M=0$。(　　)
9. 用力矩分配法计算图 10.31 所示结构时，杆 AC 的分配系数 $\mu_{AC}=18/29$。(　　)

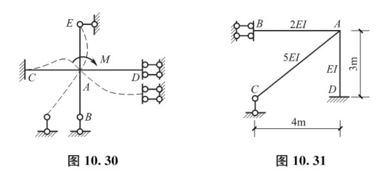


图 10.30　　图 10.31

10. 有多个刚结点角位移的结构，用力矩分配法计算时，各结点轮换放松，每放松一次结点角位移有一新的增量，经过无限次轮换放松后所得到的结点角位移收敛于其真实角

位移。(　　)

11. 多结点力矩分配的计算中，每次只有一个结点被放松，其余刚结点仍被锁住，对于结点甚多的结构，也可采用隔点放松的方法，这样可提高计算效率。(　　)

四、选择题

1. 在力矩分配法中，转动刚度(劲度系数)表示杆端对下列作用的抵抗能力(　　)。

A. 变形　　B. 移动　　C. 转动　　D. 荷载

2. 在力矩分配法中反复进行力矩分配及传递，结点的不平衡力矩(约束力矩)愈来愈小，主要是因为(　　)。

A. 分配系数及传递系数<1　　B. 分配系数<1

C. 传递系数=1/2　　D. 传递系数<1

3. 图10.32所示连续梁，$EI=$常数。用力矩分配法求得结点B的不平衡力矩为(　　)。

A. −20kN·m　　B. 15kN·m　　C. −5kN·m　　D. 5kN·m

4. 在图10.33所示连续梁中，力矩分配系数μ_{BC}与μ_{CB}分别等于(　　)。

A. 0.429，0.571　　B. 0.5，0.5　　C. 0.571，0.5　　D. 0.6，0.4

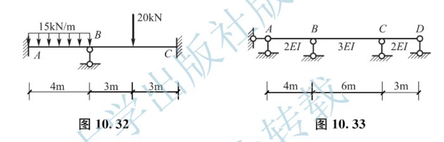


图 10.32　　图 10.33

5. 图10.34所示刚架，结点A承受力偶作用，$EI=$常数。用力矩分配法求得AB杆B端的弯矩是(　　)。

A. 2kN·m　　B. −2kN·m

C. 8kN·m　　D. −8kN·m

6. 图10.35所示各结构可直接用力矩分配法计算的为(　　)。

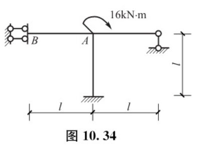
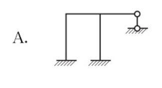
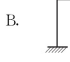
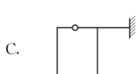


图 10.34

A. 

B. 

C. 

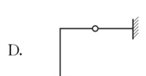
D. 

图 10.35

7. 图10.36所示结构$EI=$常数，力矩分配系数为$\mu_{BA}=\mu_{BC}=0.5$，经计算最终杆端弯矩为(　　)。

A. $M_{AB}=-14\text{kN}\cdot\text{m}$　　　　B. $M_{BA}=-1\text{kN}\cdot\text{m}$

C. $M_{BC}=-19\text{kN}\cdot\text{m}$　　　　D. $M_{CB}=0$

8. 图 10.37 所示结构用力矩分配法计算时，结点 A 的不平衡力矩(约束力矩)为(　　)。

A. $Pl/6$　　B. $2Pl/3$　　C. $17Pl/24$　　D. $-4Pl/3$

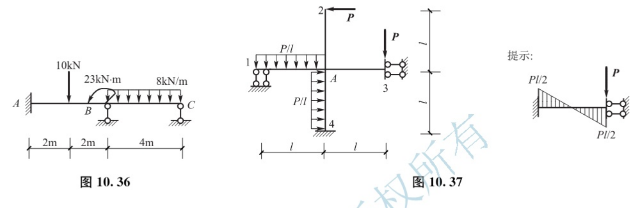


图 10.36　　　　图 10.37

五、计算题

1. 用力矩分配法计算图 10.38 所示连续梁。绘出其弯矩图和求出支座反力。

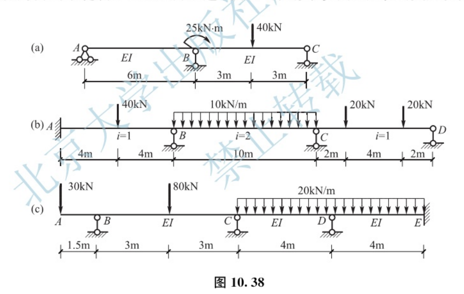


图 10.38

2. 用力矩分配法计算图 10.39 所示刚架。

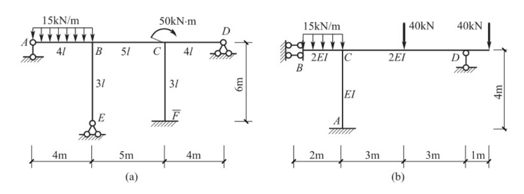


图 10.39

3. 图 10.40 所示为某商场框架计算简图，用力矩二次分配法计算并画出其弯矩图(利用对称性简化后再算)。已知横梁为矩形截面 $b\times h=250\text{mm}\times550\text{mm}$，柱截面为 $500\text{mm}\times50\text{mm}$，采用 C20 混凝土，弹性模量 $E=25.5\times10^6\text{kN/m}^2$。

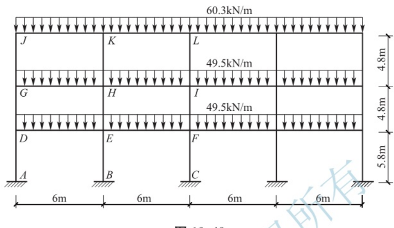


图 10.40

4. 用分层法计算图 10.41 所示二跨三层刚架，作出 M 图。圆圈内的数字表示梁柱相对线刚度 i 值。

5. 用反弯点法计算图 10.42 所示刚架，并画出弯矩图。圆圈内数字为各杆的相对线刚度。

6. 用 D 值法计算图 10.42 所示刚架，并画出弯矩图。

7. 用剪力分配法计算图 10.43 所示排架各柱的剪力，并画出柱的弯矩图。

8. 用较简捷的方法绘制图 10.44 所示各结构的弯矩图。除注明者外，各杆的 EI、l 均相同，未注明位置的集中力均作用在该杆段的中央处。

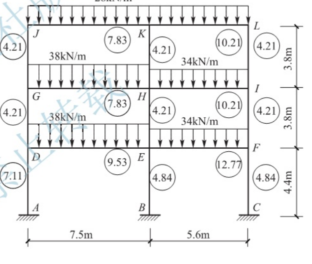


图 10.41

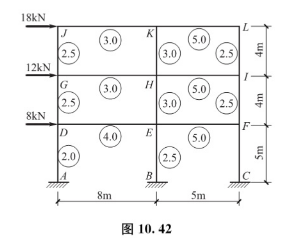


图 10.42

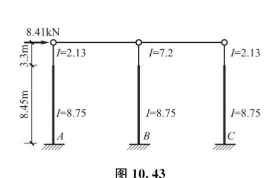


图 10.43

(a) (b)

(c) (e)

(d)

(f)

(g)

(h) (i) (j)

(k) (l) (m)

(n) (o) (p)

图 10. 44

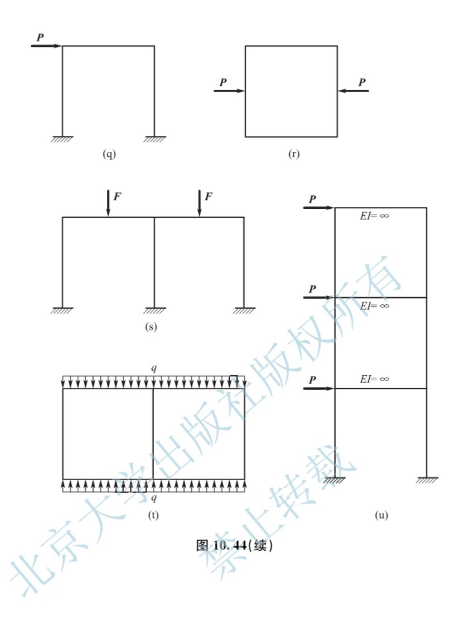


图 10.44(续)

第11章 影响线及其应用

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
影响线及其应用	熟悉	移动荷载及影响线的概念
	掌握	静力法作静定梁的影响线
	掌握	机动法作静定梁的影响线
	熟悉	利用影响线确定最不利状态位置的方法
	掌握	简支梁内力包络图的概念和作图方法
	了解	超静定结构的影响线

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
静力法作静定梁的影响线	掌握	绘制影响线，确定不利荷载位置，计算最大影响量值
机动法作静定梁的影响线	掌握	
利用影响线确定最不利状态位置的方法	熟悉	进行结构设计
简支梁内力包络图的概念和作图方法	掌握	
超静定结构的影响线	了解	不利荷载的布置，最大内力的计算



导入案例

卡车行驶在桥梁的什么位置时，会对桥梁产生最大的影响？

当一个竖向集中力 P 在图 11.1 所示梁上左右移动时，由静力分析，不难看出只有该集中力移动到梁的跨中时，才会产生全梁的最大弯矩值。集中力移动到梁上其他位置时，所产生的最大弯矩值均小于该值。结构工程师按此设计桥梁、配置钢筋，就能保证全梁的安全。但是，如果是一辆卡车在该桥梁上行驶(图 11.2)，由于卡车有前后两处的轮压荷载(若有拖车，或是一个车队，则还会有更多的荷载)，行驶过程中，前后轮压的间距不变，那么，卡车行驶到什么位置时，会对桥梁产生全梁的最大弯矩值呢？显然，这是工程师需要关心和解决的问题。本章将对确定一组移动荷载作用在结构上什么位置时，会产生结构最大影响量值及该量值的大小等问题进行讨论和研究。

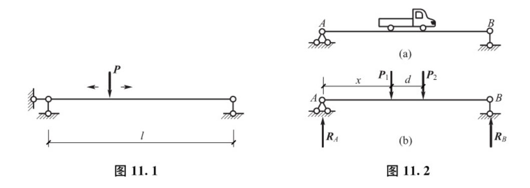


图 11.1　　　　图 11.2

11.1 影响线的概念

前面几章主要讨论了在固定荷载作用下各种结构的静力计算问题。这类荷载的大小、方向和作用点的位置在结构上是固定不变的，因此结构的支座反力和各截面上的内力与位移也是不变的。实际工程结构除受到固定荷载作用外，还要受到移动荷载作用，这类荷载的大小、方向不变，但作用位置可在结构上移动。如工业厂房中吊车梁上行驶的吊车轮压[图 11.3(a)]，桥梁上行驶的汽车、火车的轮压都是移动荷载。显然，当作用于结构上的移动荷载改变其作用位置时，支座反力和截面内力以及位移(统称为量值)都将随着改变。如吊车轮压在吊车梁 AB 上自 A 向 B 移动时 [图 11.3(b)、(c)]，吊车梁 AB 的支座反力 R_A 将逐渐减小，而支座反力 R_B 将逐渐增大。相应梁各截面的弯矩和剪力也将随荷载位置的移动而变化。因此，当结构上有移动荷载作用时，在结构分析和设计中，必须解决以下问题：

(1) 确定某量值的变化范围和变化规律；

(2) 计算某量值的最大值，以作为设计的依据。这就需要首先确定最不利荷载位置——使结构某量值达到最大值的荷载位置。

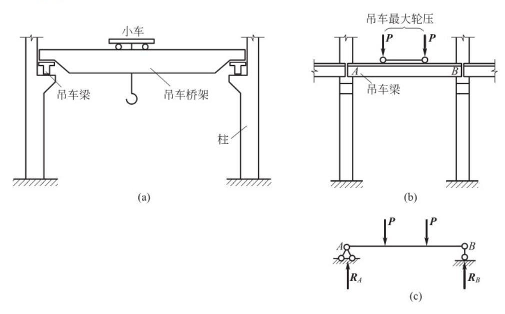


图 11.3

影响线是解决以上问题最方便的工具和手段。为此本章先引出影响线的概念。

实际工程中的移动荷载通常是由若干个大小、间距不变的竖向荷载所组成的，其类型是多种多样的，不可能逐一加以研究。为此，可先研究一种最简单的荷载，即一个竖向单位集中荷载 $P=1$ 沿结构移动时，对指定量值所产生的影响，然后根据叠加原理，进一步研究各种移动荷载对该量值的影响。

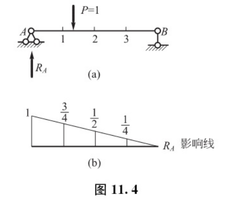


图 11.4

例如图 11.4(a)所示简支梁，当荷载 $P=1$ 分别移动到 A、1、2、3、B 各等分点时，反力 R_A 的数值分别为 1、$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、0。如果以横坐标表示荷载 $P=1$ 的位置，以纵坐标表示反力 R_A 的数值，并将所得各数值在水平的基线上用竖标绘出，再将各竖标顶点连接起来，这样所得的图形［图 11.4(b)］就表示了 $P=1$ 在梁上移动时反力 R_A 的变化规律。这一图形就称为反力 R_A 的影响线。

由此，可引出影响线的定义如下：当一个指向不变的单位集中荷载(通常是竖直向下的)沿结构移动时，表示某一指定量值变化规律的图形，称为该量值的影响线。

11.2 用静力法作单跨静定梁的影响线

绘制影响线的基本方法有两种，即静力法和机动法。首先介绍静力法。

用静力法作影响线的过程如下。

(1) 选取坐标原点，将荷载 $P=1$ 放在任意位置，以自变量 x 表示单位荷载作用点的位置。

(2) 依据静力平衡条件求出某量值与 x 之间的函数关系，即影响线方程。

(3) 根据影响线方程绘出图形，即影响线。

这种绘制影响线的方法称为静力法。

1. 简支梁的影响线

1) 反力影响线

简支梁支座反力 R_A 的影响线在 11.1 节已讨论过了［图 11.4(b)］，现在讨论图 11.5(a)所示简支梁支座反力 R_B 的影响线。为此，取梁的左端 A 点为坐标原点，令单位荷载 $P=1$ 至原点 A 的距离为 x，并假定反力的方向以向上为正，由静力平衡条件 $\sum M_A=0$ ，得

$$R_B l-Px=0$$

$$R_B=\frac{Px}{l}=\frac{x}{l} \quad (0\leqslant x\leqslant l)$$

这就是 R_B 的影响线方程。由于它是 x 的一次函数，由此可知 R_B 的影响线也是一条直线。只需定出两点：当 $x=0$，$P=1$ 在 A 点时，$R_B=0$；当 $x=l$，$P=1$ 移至 B 点时，$R_B=1$。于是，可绘出 R_B 影响线如图 11.5(c)所示。在绘制影响线时，通常规定正值的竖标画在基线上方，负值的竖标画在基线下方，并要求注明正负号。由于 $P=1$ 是不带任何

单位的，即为无量纲量，所以反力影响线的纵标也是无量纲量。以后利用影响线研究实际荷载的影响时，再乘以实际荷载相应的单位。

绘制反力影响线的规律：简支梁某支座反力影响线为一条斜直线，在该支座处向上取纵标1，在另一支座处取零。

2）弯矩影响线

绘制弯矩影响线时，需先明确截面位置。设绘制截面 C 的弯矩 M_C 的影响线，可设坐标原点于 A［图11.6(a)］，由于荷载 $P=1$ 在截面 C 以左和以右移动时，截面 C 的弯矩具有不同的表达式，所以 M_C 影响线方程有两种情况。

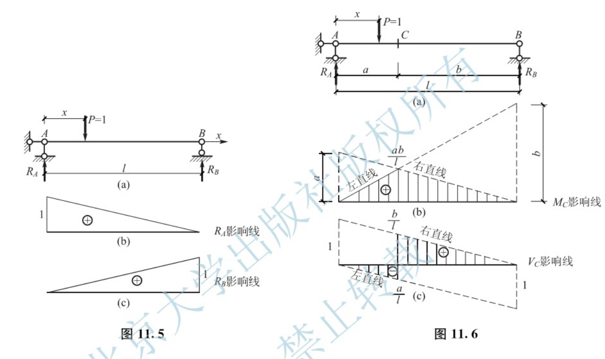


图 11.5　　　　图 11.6

(1) 当荷载 $P=1$ 在截面 C 以左移动时，为了计算简便，取截面 C 以右部分为隔离体，并以使梁下面纤维受拉的弯矩为正，则有

$$M_C=R_Bb=\frac{x}{l}b \quad (0\leqslant x\leqslant a)$$

上式表明 M_C 影响线与 R_B 的影响线成正比，是 R_B 的 b 倍，与 R_B 同符号，在截面 C 以左是一段直线。

当 $x=0$ 时，　　$M_C=0$

当 $x=a$ 时，　　$M_C=\dfrac{ab}{l}$

由此可画出 M_C 影响线的左直线［图11.6(b)］，左直线仅在截面 C 左侧适用。

(2) 当荷载 $P=1$ 在截面 C 以右移动时，取截面 C 以左部分为隔离体，得

$$M_C=R_Aa=\frac{(l-x)}{l}a \quad (a\leqslant x\leqslant l)$$

可见 M_C 影响线与 R_A 的影响线成正比，是 R_A 的 a 倍，与 R_A 同符号，在截面 C 以右是一段直线。

当 $x=a$ 时，　　$M_C=\dfrac{ab}{l}$

当 $x=l$ 时，　　　　　　　　　　$M_C=0$

据此可画出 M_C 影响线的右直线［图 11.6(b)］，右直线仅在截面 C 右侧适用。

绘制简支梁任意截面弯矩影响线规律：先在左支座 A 处取纵标 a 与右支座 B 处的零点用直线相连得右直线，然后在右支座 B 处取纵标 b 与左支座 A 处的零点相连得左直线或从截面 C 引下竖线与右直线相交，再与左支座 A 处的零点相连得左直线。M_C 影响线是由左、右直线与基线组成的一个三角形［图 11.6(b)］。

由于荷载 $P=1$ 是无量纲量，故弯矩影响线的单位应为长度单位。

3）剪力影响线

与弯矩影响线类似，若绘制截面 C 的剪力影响线，仍按两种情况分别考虑。

(1) 当荷载 $P=1$ 在截面 C 以左移动时，取截面 C 以右部分为隔离体，并以绕隔离体顺时针方向转的剪力为正，则有

$$V_C=-R_B=-\frac{x}{l}\quad(0\leqslant x<a)$$

上式表明剪力影响线 V_C 与 R_B 影响线数值相同，但符号相反，也是一段直线，可由两点确定：

当 $x=0$ 时，　　　　　　　　　　$V_C=0$

当 $x=a$ 时，　　　　　　　　　　$V_C=-\dfrac{a}{l}$

据此可画出 V_C 影响线的左直线［图 11.6(c)］。

(2) 当荷载 $P=1$ 在截面 C 以右移动时，取截面 C 以左部分为隔离体，得

$$V_C=R_A=\frac{l-x}{l}\quad(a<x\leqslant l)$$

上式表明剪力影响线 V_C 与 R_A 完全相同，仍为一段直线。

当 $x=a$ 时，　　　　　　　　$V_C=\dfrac{l-a}{l}=\dfrac{b}{l}$

当 $x=l$ 时，　　　　　　　　　　$V_C=0$

从而画得右直线。左、右直线与基线共同组成剪力 V_C 影响线，如图 11.6(c)所示。剪力影响线与反力影响线一样，纵标也是无量纲量。

绘制简支梁任意截面剪力影响线的规律：先在左支座 A 处取纵标 1，以直线与右支座 B 处的零点相连得右直线，再于右支座 B 处取纵标(－1)与左支座 A 处的零点相连得左直线，然后由截面 C 引下竖线与左、右直线相交。基线上面纵标取正号，下面纵标取负号。

2. 伸臂梁的影响线

1）反力影响线

图 11.7(a)所示为两端伸臂梁，坐标原点设在 A 支座处，x 以向右为正，向左为负。利用整体平衡条件条件，可分别求得支座反力 R_A、R_B 的影响线方程：

$$\left.\begin{aligned}R_A&=\frac{l-x}{l}\\R_B&=\frac{x}{l}\end{aligned}\right\}\quad(-d_1\leqslant x\leqslant l+d_2)$$

注意当荷载 $P=1$ 位于 A 点以左时 x 为负值，故以上两方程在梁的全长范围内都是适用

的。由于上面两式与简支梁的反力影响线方程完全相同，因此只需将简支梁的反力影响线向两个伸臂部分延长，即得伸臂梁的反力 R_A 和 R_B 的影响线，如图 11.7(b)、(c)所示。

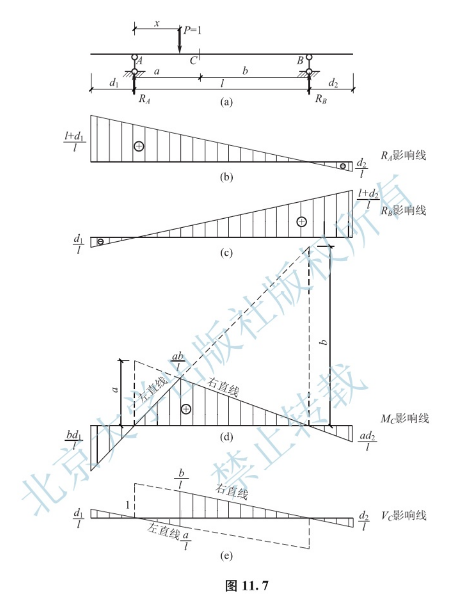


图 11.7

2）跨内部分截面内力影响线

设求两支座间的任一指定截面 C 的弯矩和剪力影响线。

当荷载 $P=1$ 在截面 C 以左移动时，取截面 C 以右部分为隔离体，得影响线方程：

$$\left.\begin{aligned} M_C &= R_B b \\ V_C &= -R_B \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant x < a)$$

当荷载 $P=1$ 在截面 C 以右移动时，取截面 C 以左部分为隔离体，得影响线方程：

$$\left.\begin{aligned} M_C &= R_A a \\ V_C &= R_A \end{aligned}\right\} \quad (a < x \leqslant l)$$

由此可知，M_C 与 V_C 的影响线方程也与简支梁的完全相同的。因而与作反力影响线一样，只需将相应简支梁上截面 C 的弯矩和剪力影响线向两伸臂部分延长，即可得到伸臂梁 M_C 和 V_C 的影响线，如图 11.7(d)、(e)所示。

3）伸臂部分截面内力影响线

设求伸臂部分上任一指定截面 D 的弯矩和剪力影响线［图 11.8(a)］。

当荷载 $P=1$ 在截面 D 以左移动时，取截面 D 以右部分为隔离体，得

$$\left.\begin{array}{l}M_D=0\\V_D=0\end{array}\right\}$$

当荷载 $P=1$ 在截面 D 以右移动时，取截面 D 以左部分为隔离体，得

$$\left.\begin{array}{l}M_D=-x\\V_D=+1\end{array}\right\}\quad(0<x\leqslant c)$$

由此，可作出 M_D 和 V_D 影响线如图 11.8(b)、(c)所示。

对于支座截面处的剪力影响线，因有支座反力作用，所以需按支座左、右两侧的两个截面分别考虑，因为这两个截面是分别属于伸臂部分和跨内部分的。现以作 B 支座处左、右截面的剪力影响线为例进行说明。对于 B 支座右截面的剪力影响线 V_B^R，可由 V_D 影响线使截面 D 趋于截面 B 以右得到，V_B^R影响线如图 11.8(d)所示。对于 B 支座左截面的剪力影响线，因截面 B 以左在跨内，可由跨内截面 V_C 影响线使截面 C 趋于截面 B 以左得到，V_B^L影响线如图 11.8(e)所示。

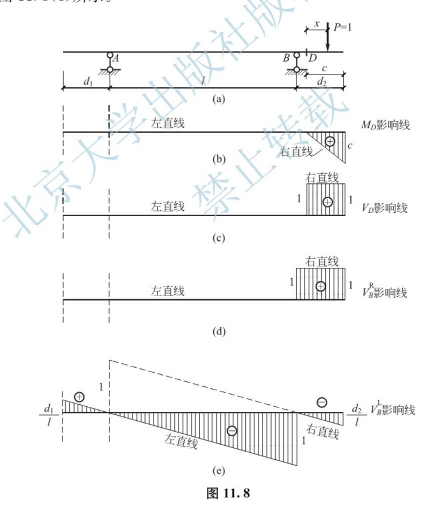


图 11.8

3. 影响线与内力图的区别

影响线和内力图的图形有时虽然相似，但它们有着本质区别。

(1) 内力图的作图范围是整个结构，其基线就表示该结构；而影响线的作图范围是荷载移动的范围，其基线表示的是单位荷载的移动路线，荷载不经过的位置，不绘制影响线。

(2) 内力图表示的是当外荷载不动时，各个截面的内力值；而影响线表示的是当外载移动时，某指定截面的内力值，显然各图竖标代表的含义不同。例如，图 11.9(a)所示为简支梁的弯矩 M_C 的影响线，其上每一竖标都表示单位荷载移动到该位置时指定截面 C 的弯矩值；图 11.9(b)所示为简支梁的弯矩图，其上每一竖标表示固定荷载 $P=1$ 作用于 C 点时不同截面的弯矩值。两图中只有一根竖标不仅值相等，而且力学概念相同，这就是 C 截面下两图的竖标。

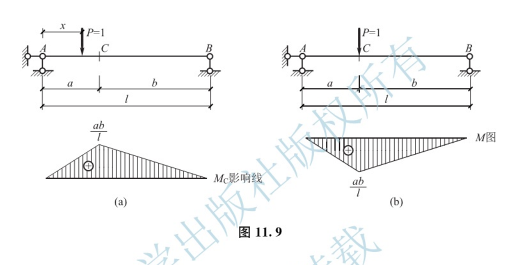


图 11.9

11.3 静力法作间接荷载作用下静定梁的影响线

前面所讨论的影响线是移动荷载直接作用在梁上的情形，故称为直接荷载作用下的影响线。而在实际工程中荷载有时不是直接作用而是通过纵横梁系间接地作用于结构的，如图 11.10(a)所示的桥梁结构体系。计算主梁时通常可假定纵梁简支在横梁上，横梁简支在主梁上。荷载直接作用在纵梁上，再通过横梁传到主梁，主梁上的这些荷载传递点称为主梁的结点。这样一来，不论荷载作用在纵梁的什么位置，其作用都是通过这些结点传递到主梁上的，因而主梁总是在其结点处受集中力的作用。对主梁来说，这种荷载称为间接荷载或结点荷载。本节就是讨论主梁在间接荷载作用下，某些量值的影响线的作法。

现以主梁上截面 C 的弯矩影响线为例，来说明间接荷载作用下影响线的绘制方法。

首先，考虑荷载 $P=1$ 移动到各结点 A、D、E、F、B 处时的情况。显然此时与荷载直接作用在主梁上的情况完全相同。因此，可先作出荷载直接作用在主梁上时 M_C 的影响线［图 11.10(b)］，在此影响线中，各结点处的竖标 y_D、y_E、y_F对于间接荷载来说都是正确的。

其次，考虑荷载 $P=1$ 在任意两相邻结点 D、E 之间的纵梁上移动时的情况。由图 11.10(c)可见，由于纵梁简支在横梁上，因而可利用纵梁的平衡条件 $\sum m_D=0$ 和 $\sum m_E=0$，分别求得横梁的反力 $R_E=\dfrac{x}{d}$ 和 $R_D=\dfrac{d-x}{d}$。这组支座反力通过横梁传给主梁，

即主梁在结点 D、E 处分别受到结点荷载$\frac{d-x}{d}$和$\frac{x}{d}$的作用。由影响线的定义可知：当荷载 $P=1$ 作用在主梁的结点 D 时，$M_C=y_D$；当荷载 $P=1$ 作用在主梁结点 E 时，$M_C=y_E$，如图 11.10(b)所示。则当 $P=\frac{d-x}{d}$作用于主梁的结点 D 时，$M_C=\frac{d-x}{d}\cdot y_D$；当 $P=\frac{x}{d}$作用于主梁的结点 E 时，$M_C=\frac{x}{d}\cdot y_E$。两者共同作用时，根据叠加原理有

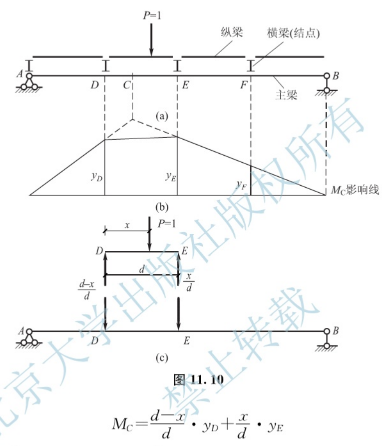


图 11.10

$$M_C=\frac{d-x}{d}\cdot y_D+\frac{x}{d}\cdot y_E$$

这就是荷载 $P=1$ 作用在纵梁的 D、E 结点之间时，主梁 DE 段的影响线方程。方程式是 x 的一次式，说明在 DE 段 M_C 的影响线是一条直线。且由

当 $x=0$ 时，　　　　$M_C=y_D$

当 $x=d$ 时，　　　　$M_C=y_E$

可知，此直线就是连接竖标 y_D 和 y_E 的直线［图 11.10(b)］。

同理，当荷载 $P=1$ 作用在 AD、EF、FB 各段纵梁上时，各段影响线也应该是各段两结点处影响线竖标的顶点连一直线。结果主梁的影响线与荷载直接作用在主梁上时完全一致。因此，在间接荷载作用下，主梁 M_C 的影响线如图 11.10(b)所示。

上面的结论，实际上适用于间接荷载作用下任何量值的影响线。由此，可将绘制间接荷载作用下影响线的一般方法归纳如下。

(1) 先假定没有纵梁，作出直接荷载作用下所求量值的影响线，以虚线表示。

(2) 从各结点引竖标与直接荷载作用下的影响线相交，得出结点竖标。

(3) 根据间接荷载作用下，结构任何影响线在相邻两结点间为直线的规律，以直线连接各结点纵标的顶点。

11.4 静力法作静定桁架的影响线

为了作静定平面桁架的影响线，先要分析静定平面桁架的受力特点。具体要注意以下几点。

(1) 作用于桁架上的移动荷载，或上行或下行都通过纵梁和横梁传递到桁架结点上。因此，绘制桁架在结点荷载作用下的影响线时，11.3 节讨论的关于间接荷载作用下影响线的性质都适用。

(2) 单跨静定梁式桁架支座反力的计算与相应单跨梁相同，所以两者的支座反力影响线也完全相同。因此，本节只讨论桁架杆件内力影响线的作法。

(3) 在固定荷载作用下，计算桁架内力的方法通常有结点法和截面法，而截面法又可分为力矩法和投影法。用静力法作桁架内力的影响线时，同样是用这些方法，只不过所作用的荷载是一个移动的单位荷载。因此，只需考虑 $P=1$ 在不同部分移动时，分别写出所求杆件内力的影响线方程，即可根据方程作出影响线。

(4) 对于斜杆，为计算方便，可先绘出其水平或竖向分力的影响线，然后按比例关系求得其内力影响线。

下面以图 11.11(a)所示简支桁架为例，来说明桁架内力影响线的绘制方法。设单位荷载沿桁架下弦 AG 移动，荷载的传递方式与图 11.11(b)所示的梁相同。

1. 截面法

1) 上弦杆轴力 N_{bc} 的影响线

作截面 I—I，以结点 C 为矩心，根据力矩方程 $\sum M_C=0$，求 N_{bc}。

(1) 当荷载 $P=1$ 在结点 C 以右移动时，取截面 I—I 以左部分为隔离体，由 $\sum M_C=0$，得

$$-R_A\times 2d-N_{bc}h=0$$

$$N_{bc}=-\frac{2d}{h}R_A$$

由此可知，将反力 R_A 的影响线竖标乘 $\left(-\frac{2d}{h}\right)$，得到 N_{bc} 的影响线的右直线。

(2) 当荷载 $P=1$ 在结点 B 以左移动时，取截面 I—I 以右部分为隔离体，由 $\sum M_C=0$，得

$$R_G\times 4d+N_{bc}h=0$$

$$N_{bc}=-\frac{4d}{h}R_G$$

由此可知，将反力 R_G 影响线竖标乘 $\left(-\frac{4d}{h}\right)$，得到 N_{bc} 的影响线的左直线。

(3) 当荷载 $P=1$ 在 B、C 之间移动时，由间接荷载作用下影响线的性质可知，N_{bc} 影响线在此段应为一直线，即将结点 B、C 处的竖标用直线相连。于是可绘出 N_{bc} 的影响线如图 11.11(c)所示。

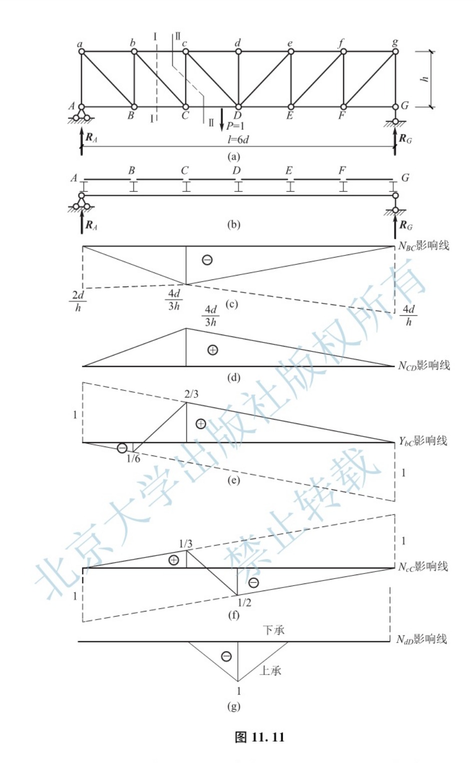


图 11.11

实际上，上述 N_{bc} 的影响线的左、右直线的两个方程也可以合并写为一个式子，即

$$N_{bc}=-\frac{M_C^0}{h}$$

即可由相应简支梁上矩心 C 处的弯矩影响线除以力臂 h，并反号便得到 N_{bc} 的影响线，如图 11.11(c)所示。N_{bc} 的影响线为一三角形，顶点的竖标为

$$-\frac{ab}{lh}=-\frac{2d\times 4d}{6dh}=-\frac{4d}{3h}$$

从几何关系不难得知，N_{bc} 的影响线的左、右直线的交点恰好在矩心 C 的下面。

2）下弦杆轴力 N_{CD} 的影响线

作截面Ⅱ—Ⅱ，以结点 c 为矩心，由力矩方程 $\sum M_c=0$，得

$$N_{CD}=\frac{M_C^0}{h}$$

即可由相应简支梁上矩心 c 处的弯矩影响线除以力臂 h，便得到 N_{CD} 的影响线，如图 11.11(d)所示。

3）斜杆 bC 轴力的竖向分力 Y_{bC} 的影响线

仍用截面 Ⅰ—Ⅰ，根据投影方程 $\sum Y=0$，求 Y_{bC}。

(1) 当荷载 $P=1$ 在结点 C 以右移动时，取截面 Ⅰ—Ⅰ 以左部分为隔离体，由 $\sum Y=0$，得

$$Y_{bC}=+R_A$$

(2) 当荷载 $P=1$ 在结点 B 以左移动时，取截面 Ⅰ—Ⅰ 以右部分为隔离体，由 $\sum Y=0$，得

$$Y_{bC}=-R_G$$

根据以上两式可作出左、右直线，并在结点 B、C 间连直线，即得 Y_{bC} 的影响线如图 11.11(e)所示。

Y_{bC} 的影响线的左、右直线的两个方程也可以合并写为一个式子，即

$$Y_{bC}=V_{BC}^0$$

式中，V_{BC}^0 为相应于简支梁节间 B—C 中的任一截面的剪力影响线。

N_{bC} 的影响线可将 Y_{bC} 的影响线乘以比例系数 $\sqrt{d^2+h^2}/h$ 而得。

4）竖杆轴力 N_{cC} 的影响线

仍用截面Ⅱ—Ⅱ，根据投影方程 $\sum Y=0$，求 N_{cC}。

可利用相应简支梁节间剪力 V_{CD}^0 列出下列表示式：

$$N_{cC}=-V_{CD}^0$$

根据节间剪力 V_{CD}^0 的影响线，符号相反，作出 N_{cC} 影响线，如图 11.11(f)所示。

2. 结点法

1）当荷载 $P=1$ 在下弦移动时，竖杆轴力 N_{dD} 的影响线

因为桁架下弦结点承受荷载(下承桁架)作用，由上弦结点 d 的平衡，可得

$$N_{dD}=0$$

因此，N_{dD} 的影响线与基线重合［图 11.11(g)］，不管单位荷载在什么位置，dD 永远是零杆。

2）荷载 $P=1$ 在上弦移动时，竖杆轴力 N_{dD} 的影响线

(1) 当荷载 $P=1$ 在结点 D 时，由结点 d 的平衡，可得

$$N_{dD}=-1$$

(2) 当荷载 $P=1$ 在其他结点时，由结点 d 的平衡，可得

$$N_{dD}=0$$

结点间用直线连接，得到 N_{dD} 的影响线如图 11.11(g)所示，是一个三角形。

由此可知，作桁架的影响线时，要注意区分桁架是下弦承载，还是上弦承载。在本例中，如果桁架改为上承，则 N_{bc}、N_{CD}、Y_{bC} 的影响线仍如图 11.11(c)、(d)、(e)所示，但图 11.11(f)中的 N_{cC} 影响线需要修改，因为在上承桁架中，$N_{cC}=-V_{BC}^0$，而 N_{cC} 影响线应按节间剪力 V_{BC}^0 的影响线作出，但正负号相反。

11.5 机动法作静定梁的影响线

作静定结构支座反力和内力的影响线，除可采用静力法外，还可采用机动法。机动法作影响线是基于刚体体系的虚功原理，通过虚功方程把作影响线的静定问题转化为作刚体位移图的几何问题。

1. 机动法作单跨静定梁的影响线

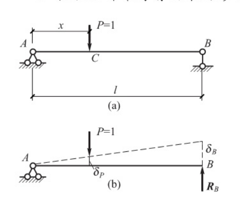


图 11.12

现以图 11.12(a)所示的简支梁为例，运用虚功原理说明机动法作影响线的原理和步骤。

1）反力影响线

若求 R_B 影响线，可去掉与它相应的约束即 B 处的支座链杆，同时用正向的支座反力 R_B 代替[图 11.12(b)]。这样原结构便成为具有一个自由度的机构。此机构在荷载和反力作用下处于平衡状态。令机构沿 R_B 正向发生任意虚位移 δ_B［图 11.12(b)]，沿 R_B 方向的位移 δ_B 是确定值，单位移动荷载 $P=1$ 作用点处的位移 δ_P 是可变值，现规定 δ_B、δ_P 均以向上为正，向下为负。根据虚功方程，有

$$R_B\delta_B-P\delta_P=0$$

因 $P=1$，故得

$$R_B=\frac{\delta_P}{\delta_B}$$

可见，R_B 与 δ_P 成正比。若令 $\delta_B=1$，则有

$$R_B=\delta_P$$

此式表明 δ_P 的值恰好就是单位力在 x 处时 B 点的反力 R_B 值，与影响线定义相同，即 $\delta_B=1$ 时的虚位移图 δ_P 就是 R_B 的影响线［图 11.12(c)]。

2）弯矩影响线

用机动法作图 11.13(a)所示简支梁任意指定截面 C 的弯矩影响线，可先在 C 处去掉与 M_C 相应的内约束，即在截面 C 处安置一个铰，并代之以一对正向弯矩 M_C［图 11.13(b)]，使梁变成机构，然后使铰 C 左右两刚片沿 M_C 的正方向发生相对转动的虚位移［图 11.13(b)]，相对转角为 $\alpha+\beta$。根据虚功方程，有

$$M_C\cdot\alpha+M_C\cdot\beta-P\cdot\delta_P=0$$

因 $P=1$，故得

$$M_C=\frac{\delta_P}{\alpha+\beta}$$

若令 $\alpha+\beta=1$，则

$$M_C=\delta_P$$

同理，上式表明，在 $\alpha+\beta=1$ 的条件下，δ_P 虚位移图即 M_C 的影响线［图 11.13(c)]。影响

线顶点坐标 y 可通过如下关系求得：

$$\alpha=\frac{y}{a},\quad \beta=\frac{y}{b}$$

$$\alpha+\beta=\frac{b+a}{ab}y=1$$

$$y=\frac{ab}{a+b}=\frac{ab}{l}$$

可见，影响线顶点坐标 y 与静力法所得结果一致。

3）剪力影响线

用机动法作图 11.14(a)所示简支梁任意指定截面 C 的剪力影响线，可先在截面 C 处撤除与 V_C 相应的内约束，即将截面 C 处改为用两根水平链杆相连——定向滑动约束（这样，此处不能抵抗剪力但仍能承受弯矩和轴力），并代之以一对正向剪力 V_C。若令机构沿 V_C 正向发生虚位移［图 11.14(b)］，则根据虚功方程，有

$$V_C\cdot y_{左}+V_C\cdot y_{右}-P\cdot\delta_P=0$$

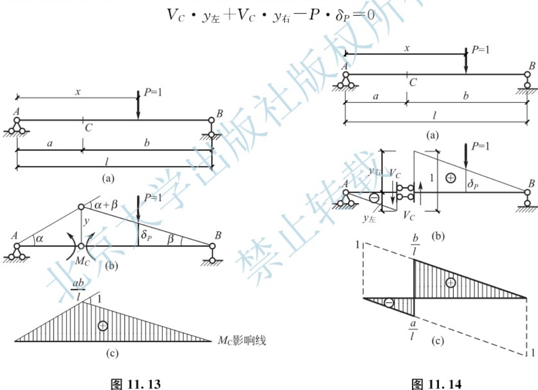


图 11.13　　图 11.14

因 $P=1$，故得

$$V_C=\frac{\delta_P}{y_{左}+y_{右}}$$

若令 $y_{左}+y_{右}=1$，则

$$V_C=\delta_P$$

上式表明，在 $y_{左}+y_{右}=1$ 的条件下，δ_P虚位移图即 V_C 的影响线［图 11.14(c)］。$y_{左}$、$y_{右}$ 的求法：

$$\frac{y_{左}}{a}=\frac{y_{右}}{b}=\frac{y_{左}+y_{右}}{a+b}=\frac{1}{l}$$

$$y_{左}=\frac{a}{l},\quad y_{右}=\frac{b}{l}$$

此结果与前面静力法结果相同。

归结起来，用机动法作反力或内力影响线的步骤如下。

(1) 去掉与所求量值相应的约束，并代之以正向约束力。

(2) 使机构沿约束力正向发生单位虚位移，得到的荷载作用点的竖向虚位移图(δ_P图)，即为所求影响线。

(3) 在横坐标以上的图形，影响线取正号；在横坐标以下的图形，影响线取负号。

机动法作影响线不仅适合简支梁，同样也适合外伸梁与悬臂梁。对于多跨静定梁也完全可以采用。

2. 机动法作多跨静定梁的影响线

用机动法作多跨静定梁的支座反力和内力的影响线十分简便。原理与步骤同单跨静定梁，只需注意去掉约束后虚位移图形的特点。多跨静定梁是由基本部分和附属部分组成的，去掉约束后给虚位移时，应搞清哪些部分可以发生虚位移，哪些部分不能发生虚位移。属于基本部分的某量，去掉相应约束后在基本部分形成机构，则除在基本部分引起虚位移外，还将影响到所支承的附属部分，位移图在基本部分和其所支承的附属部分都有。属于附属部分的某量，去掉相应约束后仅在附属部分形成机构，则体系只能在附属部分发生虚位移，基本部分不能动，因此，位移图只限于附属部分。现以例题说明。

【例 11-1】 用机动法作图 11.15(a)所示多跨静定梁的R_B、M_B、V_B^L、V_B^R、M_K的影响线。

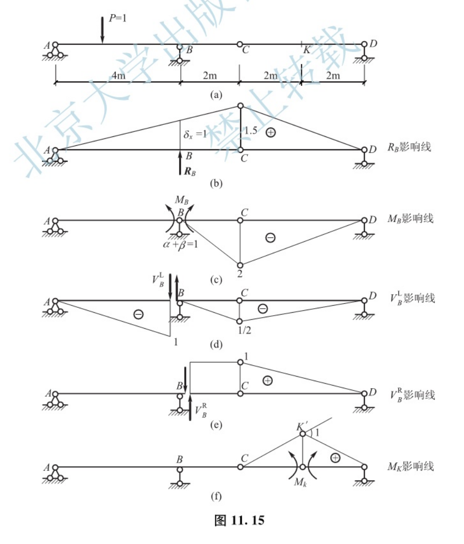


图 11.15

解：(1) R_B的影响线。在多跨静定梁中去掉 B 支座，并代之以正方向的 R_B，于是 ACD 形成有一个自由度的机构。使其沿 R_B正方向发生单位虚位移 $\delta_B=1$，所得到的虚位移 δ_P图即是 R_B的影响线。由比例关系，可得各点竖标。R_B的影响线如图 11.15(b)所示。

(2) M_B的影响线。在 B 支座处加入全铰，并代之以一对正向的弯矩 M_B，使铰 B 两侧其沿 M_B正方向发生相对单位虚位移$\alpha+\beta=1$，由于 AB 部分几何不变，不能发生虚位移，BCD 部分的虚位移δ_P图即是M_B的影响线。由比例关系，可得 C 点竖标。M_B的影响线如图 11.15(c)所示。

(3) V_B^L的影响线。在 B 左加入定向约束，并代之以一对正向剪力 V_B^L，使 B 左两侧截面发生与剪力正向一致的单位相对竖向虚位移，由于定向约束两侧截面必须保持平行，而 AB 部分为几何不变体系，故 BC 杆只能平动，得到的虚位移 δ_P图即是 V_B^L的影响线。由比例关系，可得 B、C 点竖标。V_B^L的影响线如图 11.15(d)所示。

(4) V_B^R的影响线。在 B 右加入定向约束，并代之以一对正向剪力 V_B^R，使 B 右两侧截面发生与剪力正向一致的单位相对竖向线位移，AB 部分几何不变，不能发生虚位移，BCD 部分的虚位移δ_P图，即是 V_B^R的影响线。V_B^R的影响线如图 11.15(e)所示。

(5) M_K影响线。在 K 截面加入铰，并代之以一对正向的弯矩 M_K，使铰 K 两侧截面沿M_K正方向发生相对单位虚位移$\alpha+\beta=1$，由于 AC 部分几何不变，不能发生虚位移，CD 部分的虚位移δ_P图即是 M_K的影响线。由比例关系，可得 K 点竖标。M_K的影响线如图 11.15(f)所示。

11.6 影响线的应用

前面讨论了影响线的绘制方法，绘制影响线的目的主要是利用它来解决两方面的问题：一是当实际的移动荷载在结构上的位置已知时，如何利用某量值的影响线求出该量值的数值；二是如何利用某量值的影响线确定实际移动荷载对该量值的最不利荷载位置。下面分别加以讨论。

1. 利用影响线计算影响量

1) 集中荷载作用

图 11.16(a)所示简支梁受到一组平行集中荷载 P_1、P_2、P_3 的作用，现要利用图 11.16(b)所示 V_C的影响线，求 P_1、P_2、P_3作用下 V_C的数值。

在 V_C影响线中，相应于各荷载作用点的竖标为 y_1、y_2、y_3，它们分别是 P = 1 在相应位置产生的 V_C，因此，由 P_1产生的 V_C等于 P_1y_1，P_2产生的 V_C等于 P_2y_2，P_3产生的 V_C等于 P_3y_3，根据叠加原理可知，在这组荷载作用下的 V_C的数值为

$$V_C=P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3$$

一般说来，设有一组集中荷载 P_1、P_2、…、P_n 作用于结构上，而结构某量值 Z 的影响线在各荷载作用点的竖标分别为 y_1、y_2、…、y_n，则有

$$Z=P_1y_1+P_2y_2+\cdots+P_ny_n=\sum_{i=1}^{n}P_iy_i \tag{11-1}$$

应用式(11-1)时，P_i以向下为正，y_i的正负号由影响线确定。

2）均布荷载作用

图 11.17(a)所示简支梁，其上有长度一定的均布移动荷载作用，现在要利用图 11.17(b)所示 V_C影响线，求在给定均布荷载 q 作用下 V_C的数值。

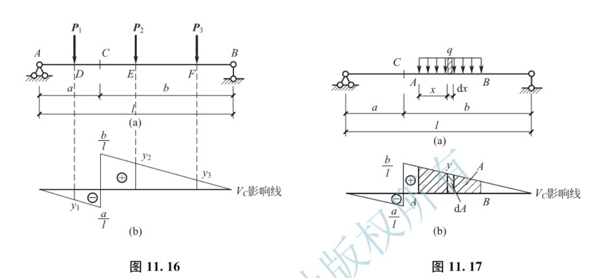


图 11.16　　　　图 11.17

以集中荷载的计算为依据，就不难求出均布荷载作用下的影响量。可将均布荷载分成无限多个微段，每个微段上的荷载 $q\mathrm{d}x$ 可看作一个集中荷载［图 11.17(a)］，它引起的 V_C的量值为 $q\mathrm{d}x \cdot y$，则在 AB 区段内的均布荷载产生的 V_C值为

$$Z=\int_A^B qy\,\mathrm{d}x=q\int_A^B y\,\mathrm{d}x=qA \tag{11-2}$$

式中，A 为影响线在均布荷载作用范围内的面积。

就是说，在均布荷载作用下，量值 Z 的数值等于荷载集度 q 与该量值影响线在荷载作用范围内的面积 A 的乘积。应用式(11-2)时，q 以向下为正，同时要注意面积 A 的正负号。

3）集中荷载和均布荷载共同作用

当集中荷载和均布荷载共同作用于梁上时，先分别计算各自影响量，然后再相加。

$$Z=\sum P_i y_i+qA \tag{11-3}$$

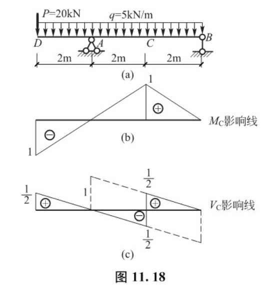


图 11.18

【例 11-2】 图 11.18(a)所示的伸臂梁，作用荷载与尺寸如图所示，利用影响线求 M_C、V_C的值。

解：(1) 作出 M_C、V_C 影响线，并计算出各控制点的纵坐标值，如图 11.18(b)、(c)所示。

(2) 计算 M_C、V_C 值。

$$\begin{aligned}M_C&=\sum P_i y_i+qA\\&=20\times(-1)+5\left(\frac{1}{2}\times1\times4-\frac{1}{2}\times1\times2\right)\\&=-15\mathrm{kN\cdot m}\end{aligned}$$

$$V_C = \sum P_i y_i + qA$$
$$= 20\times\frac{1}{2} + 5\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2\right)$$
$$= 12.5\text{kN}$$

2. 利用影响线求最不利荷载的位置

在移动荷载作用下，结构上的各种量值均将随着荷载位置的不同而变化，而设计时必须求出各种量值的最大值(包括最大正值 Z_{max} 和最大负值，最大负值也称最小值 Z_{min})，作为设计的依据。为此，必须先确定使某一量值发生最大(或最小)值的荷载位置，即最不利荷载位置。只要所求量值的最不利荷载位置一经确定，则其最大值即不难求得。影响线的最重要作用就是判定最不利荷载位置。

1）可动均布荷载的最不利布置

可动均布荷载的最不利位置是指荷载可按任意位置分布时，使某量值 Z 达到最大值的荷载分布位置。

对于可动均布荷载，由式(11－2)即 $Z=qA$ 可知，当荷载布满对应于影响线正号面积的部分时，则量值 Z 将产生最大值 Z_{max}；反之，当荷载布满对应于影响线负号面积的部分时，则量值 Z 将产生最小值 Z_{min}。例如，图 11.19(a)所示外伸梁，C 截面的弯矩影响线如图 11.19(b)所示，欲求截面 C 的最大正弯矩 M_{Cmax} 或最大负弯矩 M_{Cmin}，则它们相应的最不利荷载位置分别如图 11.19(c)、(d)所示。

2）移动集中荷载的最不利位置

移动荷载移到某个位置，使某量 Z 达到最大值时，则此荷载位置称为最不利位置。

(1) 单个集中荷载。

由式(11－1)即 $Z=Py$ 可知，当这个集中荷载作用在影响线的最大竖标处时，量值 Z 将产生最大值 Z_{max}；当这个集中荷载作用在影响线的最小竖标处时，量值 Z 将产生最小值 Z_{min}。例如，某量值的影响线如图 11.20(a)所示，则与该量值相应的最不利荷载位置分别如图 11.20(b)、(c)所示。

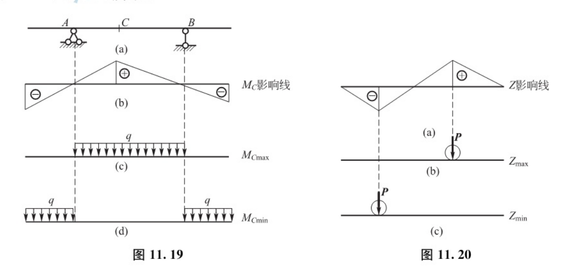


图 11.19　　图 11.20

由此可知，当只有一个移动集中荷载时，荷载移到影响线顶点时才会产生量值最大值。

(2) 一组集中荷载。

对于一组集中荷载(指一组互相平行而且间距保持不变的荷载)，其最不利荷载位置的

确定一般要困难些。下面以工程中常遇到的影响线为三角形，移动集中荷载为两个的情况为例［图 11.21(a)］，来说明确定其最不利荷载位置的方法——试算法。

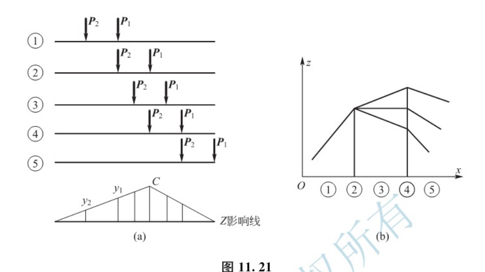


图 11.21

根据式(11-1)即 $Z=P_1y_1+P_2y_2$来分析荷载的位置与量值之间的关系。

图 11.21(a)图中的状态①(两力均在 C 点左侧)，由于量值 Z 随荷载向右而增加，因此到状态②(第一力到达 C 点)前量值 Z 是不会有极值的。当 P_1 到达 C 点时情况开始发生变化，因为再向右移(状态③)，P_1 下的影响线竖标开始减少，但 P_2 下的影响线竖标还在增加，所以量值 Z 有三种可能，如图 11.21(b)所示；一种是量值 Z 开始减少，如果出现这个结果，则状态②便是最不利荷载位置；另一种是量值 Z 继续增加(但增加缓慢)，这时量值 Z 不会出现极值；第三种是量值 Z 不增不减，这时量值 Z 也不会出现极值。当 P_2 到达 C 点时(状态④)情况又开始发生变化，因为再向右移(状态⑤)，P_1、P_2 下的影响线竖标都减小，如图 11.21(b)所示，则④状态也是最不利荷载位置。

通过以上分析可知，只有状态②和状态④才可能使量值 Z 有极值，也就是说只有一个集中力作用在影响线顶点 C 时才可能是最不利荷载位置。推广上述分析结果可以得到一个简单但又非常重要的结论，即一组集中力移动荷载作用下的最不利荷载位置，一定发生在某一个集中力(临界荷载)到达影响线顶点时才有可能，至于究竟哪个是临界荷载，尚须研究判别法(可参考一般结构力学教材)。当梁上的集中荷载数目不多时，一些荷载直观判别就可否定其为临界荷载，因此这里不准备再去讲述判别法，顶多试算两次或三次就可以确定临界荷载并得到最大正值或最大负值的影响量。

为了减少试算次数，宜事先大致估计最不利荷载位置。为此，应将荷载组中数值较大且较为密集的这部分荷载放置在影响线竖标较大处，同时注意在影响线同号区尽量多排列荷载，而避免在异号区段布载，这样比较接近于取得最大影响量的情况。

【例 11-3】 求图 11.22(a)所示简支梁在所给移动荷载作用下 C 截面的最大弯矩。

解：(1) 作 M_C 的影响线，如图 11.22(b)所示。

(2) 分析临界力的可能性。三个力中，大小为 4kN 的力肯定不是临界荷载，因为它位于 C 点时，前两力均已移出梁处。因此只有两种可能性，即大小为 6kN 或 8kN 的力。

(3) 计算最大弯矩 $M_{C\max}$。

当 $P_{cr}=6$kN 时［图 11.22(c)］，有

$$M_C=6\times\frac{4}{3}+8\times\frac{11}{15}=13.87\text{kN}\cdot\text{m}$$

当 $P_{cr}=8\text{kN}$ 时［图 11.22(d)］，有

$$M_C=6\times\frac{2}{15}+8\times\frac{4}{3}+4\times\frac{8}{15}=13.6\text{kN}\cdot\text{m}$$

通过对比计算发现，大小为 6kN 的力确系临界力，而 C 载面最大弯矩 $M_{C\max}=13.87\text{kN}\cdot\text{m}$。

【例 11－4】 求图 11.23(a)所示简支梁在所给移动荷载作用下 C 截面的最大正剪力。

解：(1) 作 V_C 的影响线，如图 11.23(b)所示。

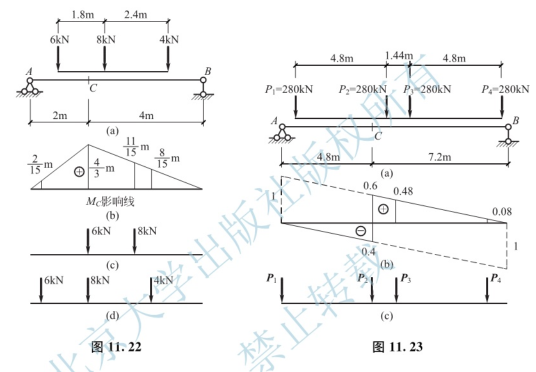


图 11.22 **图 11.23**

(2) 分析临界力的可能性。为了得到最大正剪力，四个集中力必有一个位于竖标为 0.6 的值上，当 P_4 作用于其上时，前三个力已移到梁外，此种情况不会是最不利的；P_1 作用于其上时，P_2、P_3 已移近靠 B 支座处，此时影响线正值已很小，故此种情况也不是最不利的，而只有当 P_2 作用在其上时才是最不利荷载位置［图 11.23(c)］，此时有

$$V_{C\max}=280\times(0.6+0.48+0.08)=324.8\text{kN}$$

P_2 作用在 0.6 上时，读者可自行验证。

11.7 简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩

1. 简支梁的内力包络图

在设计吊车梁等承受移动荷载的结构时，必须求出各截面上内力的最大值(最大正值和最大负值)。用 11.6 节介绍的确定最不利荷载位置进而求某量值最大值的方法，可以求出简支梁任一截面的最大内力值。如果把梁上各截面内力的最大值按同一比例标在图上，连成曲线，这一曲线即称为内力包络图。各截面最大弯矩值的连线图称为弯矩包络图，各

截面最大剪力值的连线图称为剪力包络图。内力包络图表明了在给定移动荷载作用下，梁上各截面可能产生的内力值的极限范围，它是设计吊车梁和桥梁等结构的重要资料。现以吊车梁的内力包络图为例，说明简支梁内力包络图的作法。

图 11.24(b)所示一简支梁，跨度为 12m，承受图 11.24(a)所示两台吊车荷载作用，现要绘制其弯矩图包络图。一般将梁分成若干等份(通常为 10 等份)，按 11.6 节介绍的方法求出各等分点的最大弯矩、最大正剪力与最大负剪力，以截面位置作为横坐标，求得的值作为纵坐标，用光滑曲线连接各点即可得到该梁的弯矩包络图与剪力包络图，如图 11.24(c)、(d)所示。其中距梁左端为 4.8m 处截面上的最大正剪力 324.8kN 的来源，即 11.6 节中例 11－4 所求的结果。注意简支梁弯矩包络图只有一种符号，即正号，但剪力包络图有正负之分。

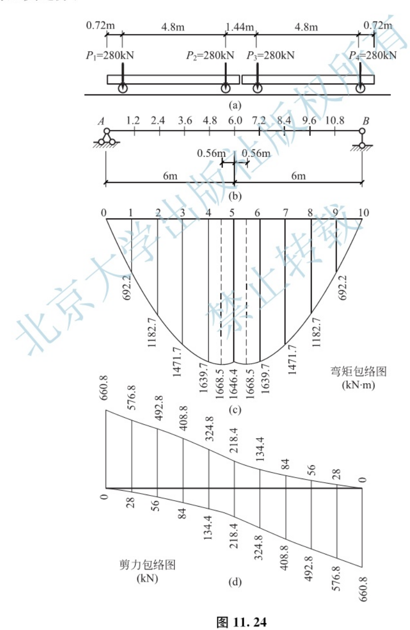


图 11.24

2. 简支梁的绝对最大弯矩

包络图表示各截面内力变化的极限情况。弯矩包络图中各竖标表示在给定的移动荷载

作用下相应截面的最大弯矩，但各截面最大弯矩值还要出现最大值(即包络图中的最大竖标)，这种最大弯矩中的最大值，称为绝对最大弯矩。由图11.24(c)中可以发现，绝对最大弯矩产生的截面并不是梁的中点，而是在梁的中点附近的某个截面。因此，它的确定与两个可变的条件有关，即截面位置的变化和荷载位置的变化。也就是说，若求绝对最大弯矩，不仅要知道产生绝对最大弯矩的所在截面，而且要知道相应于此截面的最不利荷载位置。

由于绝对最大弯矩也是某一截面的弯矩最大值，因此在解决上述问题时，自然地会想到，按照求弯矩最大值的方法，把各个截面的最大弯矩求出来，然后再加以比较。但实际上梁上截面有无限多个，不可能把梁上各个截面的最大弯矩都求出来一一加以比较。因此，这个方法是行不通的，必须寻求其他可行的途径。

根据11.6节所述可知，当梁上作用一组移动集中荷载时，对任一已知截面 C，其弯矩为最大时，必有一临界荷载 P_{cr} 位于它的影响线的顶点(即该弯矩所在截面处)，故知截面 C 的最大弯矩必将发生于某一临界荷载 P_{cr} 之下。这一结论自然也适合于绝对最大弯矩，只不过此时它的截面位置和临界荷载 P_{cr} 都是待求的。要把临界荷载和截面位置同时求出是不方便的。为此，可采用试算的办法，即先假定某一荷载 P_i 为临界荷载 P_{cr}，然后研究它作用在何处可使其所在截面的弯矩达到最大值。这样，将各个荷载分别作为临界荷载，求出其相应的最大弯矩，再加以比较，即可得出绝对最大弯矩。

图11.25所示为一简支梁，移动荷载 P_1、P_2、…、P_n 的数值和间距都不变。当荷载在梁上移动时，求梁内可能发生的最大弯矩(即绝对最大弯矩)。

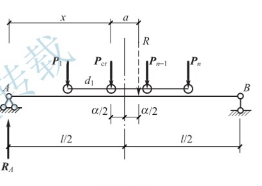


图11.25

设任一集中荷载为 P_{cr}，现研究其所在截面弯矩发生最大值的条件。以 x 表示 P_{cr} 到左支座 A 的距离，R 表示梁上所有荷载的合力，a 表示 P_{cr} 与 R 作用线间的距离；设 P_{cr} 在 R 的左边，由 $\sum m_B=0$，得

$$R_A=\frac{R}{l}(l-x-a)$$

则 P_{cr} 所在截面的弯矩为

$$M_x=R_Ax-P_1d_1=\frac{R}{l}(l-x-a)x-M_{cr}$$

式中，M_{cr} 为 P_{cr} 左面的荷载对 P_{cr} 作用点的力矩之和。

M_{cr} 是与 x 无关的常数，当 M_x 为极大时，应满足

$$\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x}=0$$

得

$$\frac{R}{l}(l-2x-a)=0$$

即

$$x=\frac{l}{2}-\frac{a}{2} \tag{11-4}$$

式(11-4)表明，当 P_{cr}所在截面的弯矩最大时，梁的中线正好平分 P_{cr}与 R 之间距离。此时最大弯矩为

$$M_{max}=\frac{R}{l}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)^2-M_{cr} \tag{11-5}$$

应用式(11-4)和式(11-5)时，由于 R 是梁上实有荷载的合力，安排 P_{cr}与 R 对称于梁中央的位置时，有些荷载可能来到梁上或者离开梁上，这时应重新计算合力 R 的数值和位置。另外，P_{cr}在 R 以左时 a 取正号，在 R 以右时 a 取负号。

比较各个荷载作用截面的最大弯矩，其中最大的一个就是绝对最大弯矩。实际计算中，常常可以估计出哪个荷载或哪几个荷载需要考虑。

【例 11-5】 求图 11.26(a)所示吊车梁的绝对最大弯矩。

解：(1) 四个力全在梁上。

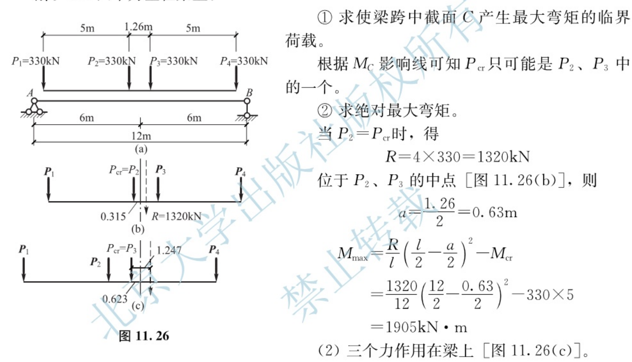


图 11.26

① 求使梁跨中截面 C 产生最大弯矩的临界荷载。

根据 M_C 影响线可知 P_{cr}只可能是 P_2、P_3 中的一个。

② 求绝对最大弯矩。

当 $P_2=P_{cr}$时，得

$$R=4\times330=1320\text{kN}$$

位于 P_2、P_3 的中点[图 11.26(b)]，则

$$a=\frac{1.26}{2}=0.63\text{m}$$

$$M_{max}=\frac{R}{l}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)^2-M_{cr}$$
$$=\frac{1320}{12}\left(\frac{12}{2}-\frac{0.63}{2}\right)^2-330\times5$$
$$=1905\text{kN}\cdot\text{m}$$

(2) 三个力作用在梁上[图 11.26(c)]。

① 求使梁跨中截面 C 产生最大弯矩的临界荷载。根据 M_C 影响线可知 P_{cr}只可能是 P_3。

② 求绝对最大弯矩

当 $P_3=P_{cr}$时，得

$$R=3\times330=990\text{kN}$$

利用合力矩定理，得

$$-990a=330\times1.26-330\times5$$
$$a=1.247\text{m}$$

$$M_{max}=\frac{R}{l}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)^2-M_{cr}$$
$$=\frac{990}{12}\left(\frac{12}{2}-\frac{1.247}{2}\right)^2-330\times1.26$$
$$=1969\text{kN}\cdot\text{m}$$

对比两个结果，得梁的绝对最大弯矩为 1969kN·m，它产生在梁上只有 P_2、P_3、P_4 时 P_3 位于距梁跨中左方 0.623m 的截面上。

11.8 超静定梁的影响线及连续梁的包络图

在进行钢筋混凝土主梁设计过程中，需要对连续梁进行活荷载的最不利组合，从而得到内力的包络图。然而荷载的最不利组合与梁的影响线有密切关系，因此先由超静定梁的影响线开始叙述。

现在研究当单位移动荷载作用于超静定梁上时影响线的绘制方法。

图 11.27(a)给出一端固定一端铰支的单跨超静定梁，当单位力 $P=1$ 作用在 x 截面时，若作 R_A 的影响线，需先求出 R_A 与 x 函数关系，这恰好相当于解一次超静定。将 R_A 设为 X_1(多余未知力)，作 M_P 图与 $\overline{M}_1$ 图［图 11.27(b)、(c)］，计算 Δ_{1P} 与 δ_{11}，有

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{2}(l-x)(l-x)\frac{(2l+x)}{3EI}=-\frac{1}{6EI}(l-x)^2(2l+x)$$

和
$$\delta_{11}=\frac{1}{2}l\times l\times\frac{2}{3}l/EI=\frac{l^3}{3EI}$$

代入力法方程，得到

$$X_1=R_A=-\frac{-\dfrac{1}{6EI}(l-x)^2(2l+x)}{\dfrac{l^3}{3EI}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{3x}{2l}+1 \qquad (11-6)$$

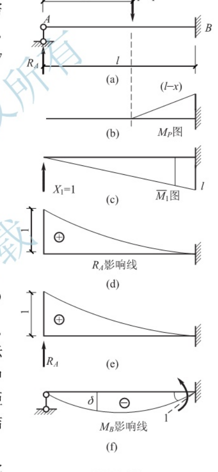


图 11.27

式(11-6)表明超静定梁影响线是曲线而不是直线。将此函数图像绘于图 11.27(d)，即为 R_A 的影响线。实际绘制超静定梁影响线时可以采用机动法，例如，本例题中为了得到 R_A 的影响线，可将 A 支座向上移动一单位距离，梁的弹性曲线即为所求影响线［图 11.27(e)］。此结论可通过梁的挠曲线加以证明。

此结论说明，弹性曲线纵坐标 y 就是反力 R_A，因此整个弹性曲线就是 R_A 影响线。

为了得到超静定梁 B 支座弯矩的影响线，可将 B 支座加一全铰，然后按正弯矩方向转一单位角，得到如图 11.27(f)所示的弹性曲线，即为所求的影响线。

下面按机动法给出多跨连续梁弯矩与剪力影响线的图形。图 11.28(a)为 M_C 影响线，它是支座 C 加铰后产生正单位相对转角时梁的弹性曲线；图 11.28(b)为 M_K 的影响线，它是 K 截面加铰后产生正单位相对转角时梁的弹性曲线；图 11.28(c)为 V_N 的影响线，它是 N 截面变为定向约束后产生正单位相对竖向位移时梁的弹性曲线；图 11.28(d)为 $V_{C右}$ 的影响线，它是 C 右截面变为定向约束后产生正单位相对竖向位移时梁的弹性曲线。

这里讲述的连续梁影响线的机动法与多跨静定梁影响线所应用的机动法有类似之处(指作法)，但静定梁影响线是几何可变体系梁轴的位移图，为斜直线，而连续梁的影响线

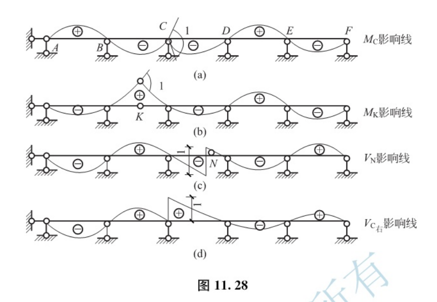


图 11.28

是梁的弹性曲线，为曲线。上述连续梁的影响线仅给出图形的形状而没给出具体坐标数值(这点已经可以满足绘制连续梁包络图的需要)。

掌握了连续梁影响线图形的绘制方法就可以进行活荷载的最不利组合布置，图 11.29 是根据不同截面弯矩的影响线布置的相应最不利活载 p 的位置。由于 C 截面弯矩影响线在 C 截面相邻两跨中均为负，然后隔一跨为负，故应使 C 支座产生最大负弯矩在 BC、CD 与 EF 跨满布活荷载 p，如图 11.29(a)和(b)所示；而要使 C 支座产生最大正弯矩，就应在 AB 跨和 DE 跨满布活荷载 p，如图 11.29(c)所示。不难推论，若想使连续梁中间支座产生最大负弯矩，一定要在该支座的相邻两跨满布活荷载，此外还要隔跨满布活荷载。图 11.29(d)给出了第二跨跨中 K 截面的弯矩影响线，由于 K 截面所在跨影响线为正值，然后隔跨为正值，因此使 K 截面产生最大正弯矩时活荷载 p 应满布在 BC、DE 跨，如图 11.29(e)所示。而若使 K 截面产生最大负弯矩，显然应在 AB、CD 和 EF 跨满布活荷载，如图 11.29(f)所示。将此结论推广，若想使连续梁某跨中有最大正弯矩，则活荷载应在此跨满布，然后向两侧隔跨满布。

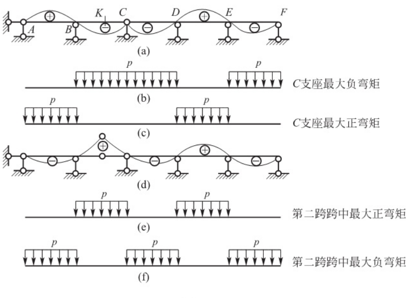


图 11.29

根据跨中弯矩与支座弯矩活荷载最不利位置的布置，可以绘制连续梁弯矩包络图。下面通过一具体例题说明连续梁包络图的作法。

【例 11-6】 图 11.30(a)为一钢筋混凝土两跨连续主梁，梁上的恒载设计值 $G=51.6\text{kN}$，活荷载设计值 $P=100\text{kN}$(此处活载为次梁传来的集中力，为方便计算，将主梁的恒载也化为相应集中力)，梁跨 $l=6.64\text{m}$，两跨刚度相同。试考虑跨中与支座弯矩的最不利状况绘制该梁的弯矩包络图。

解：由于恒载是固定不变的，无论何时都存在于梁上，所以先将其弯矩图作出。

根据对称条件，中点支座处截面转角显然为零，因此可以取图 11.30(b)所示的结构代替原梁的左部。图 11.30(b)虽然属于一次超静定梁，但其内力图的绘制可以引用刚刚讲述的超静定梁反力影响线的结果，而不必再解超静定梁。按迭加原理，图 11.30(b)所示结构 A 支座反力：

$$R_A=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+1\right]G=\frac{2}{3}G$$

相应地，

$$M_1=\frac{2}{3}G\times\frac{1}{3}l=\frac{2}{9}Gl=51.6\times6.64\times\frac{2}{9}=76.1\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_2=\frac{2}{3}G\times\frac{2}{3}l-G\times\frac{1}{3}l=\frac{1}{9}Gl=38\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B=\frac{2}{3}G\times l-G\times\frac{2}{3}l-G\times\frac{1}{3}l=-\frac{1}{3}Gl=-114.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

图 11.30(a)梁的弯矩图示于图 11.30(c)。

活荷载 P 仅作用在左跨时，可将图 11.30(d)所示梁按对称性分解为图 11.30(e)与(g)两梁。图 11.30(e)梁的弯矩图［图 11.30(f)］利用刚刚得出的静载弯矩结果，有

$$M_1=\frac{2}{9}\left(\frac{P}{2}\right)l=\frac{1}{9}\times100\times6.64=73.8\text{kN}\cdot\text{m}=M_4$$

$$M_2=\frac{1}{9}\left(\frac{P}{2}\right)l=36.9\text{kN}\cdot\text{m}=M_3$$

$$M_B=-\frac{1}{3}\left(\frac{P}{2}\right)l=-110.7\text{kN}\cdot\text{m}$$

图 11.30(g)所示梁为反对称荷载，根据对称性讨论 B 支座处弯矩，此时该梁变为两跨简支梁(属于静定结构)，其弯矩图［图 11.30(h)］中数值为

$$M_1=\frac{P}{2}\times\frac{l}{3}=\frac{1}{6}\times100\times6.64=110.7\text{kN}\cdot\text{m}=M_2=-M_3=-M_4$$

叠加图 11.30(f)与图 11.30(h)所示弯矩纵坐标，最终得到图 11.30(d)所示梁的 M 图［图 11.30(i)］，其值为

$$M_1=73.8+110.7=184.5\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_2=36.9+110.7=147.6\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_B=110.7\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_3=36.9-110.7=-73.8\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_4=73.8-110.7=-36.9\text{kN}\cdot\text{m}$$

右跨满布活荷载的弯矩图也可利用此图结果，但需翻转 180°，而两跨同时满布活荷载时的弯矩图采用上两图的叠加即可(图中未画出)。

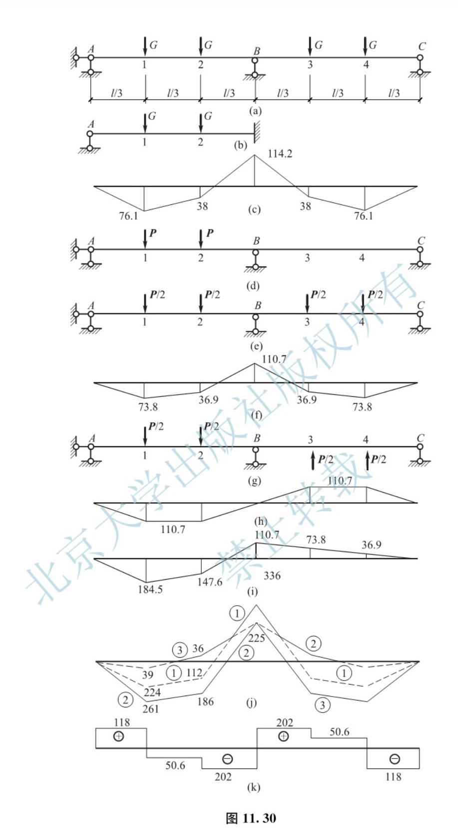


图 11.30

现在绘制此梁的弯矩包络图。

活荷载使 B 支座产生最大负弯矩时，其值应两跨均布置，加上恒载弯矩得图 11.30(j) 中的曲线①，弯矩值为

$$M_B^1 = -(2\times110.7+114.2) = -336\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_1^1=184.5-36.9+76.1=224\text{kN}\cdot\text{m}=M_4^1$$
$$M_2^1=147.6-73.8+38=112\text{kN}\cdot\text{m}=M_3^1$$

活荷载使左跨跨中产生最大正弯矩时，其值应仅布置于左跨，加上恒荷载弯矩图得图 11.30(j)的曲线②，弯矩值为

$$M_1^2=184.5+76.1=261\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_2^2=147.6+38=186\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_B^2=-(110.7+114.2)=-225\text{kN}\cdot\text{m}$$

活荷载使右跨跨中有最大正弯矩时，其值应仅布置于右跨，加上恒荷载弯矩图得图 11.30(j)中的曲线③，弯矩值为

$$M_1^3=-36.9+76.1=39\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_2^3=-73.8+38=-36\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_B^3=-(110.7+114.2)=-225\text{kN}\cdot\text{m}$$

上述 3 条曲线中曲线②不仅代表活荷载使左跨跨中产生最大正弯矩，同时也代表使右跨跨中产生最大负弯矩；而曲线③线不仅代表活荷载使右跨跨中产生最大正弯矩，同时也代表使左跨跨中产生最大负弯矩。图 11.30 中尚缺少活荷载使 B 支座产生最大正弯矩的相应曲线，根据影响线的概念，对于两跨连续梁，这种情况相当于不布置活荷载，因此也就是恒载引起的弯矩图，如果支座 B 的最小负弯矩以零为限，则该弯矩图要落到弯矩包络图内部(此处未绘出)。将所得各曲线的最外线相连，并考虑到跨中最小正弯矩以零为限，则最终得到弯矩包络图为图 11.30(j)中的实线所组成的图形。

对于剪力，实际应用中主要是求出支座左右的最危险剪力值，就本例题而言，是要求出 $A_{右}$ 截面的最大正剪力和 $B_{左}$ 截面的最大负剪力，根据连续梁剪力影响线，使 $A_{右}$ 产生最大正剪力时活荷载应仅在左跨布置，此时恒载和活载同时考虑，剪力值为

$$V_{A右}=51.6+100-225/6.64=118\text{kN}$$

根据影响线，使 $B_{左}$ 截面产生最大负剪力应在两跨同时满布活载，加上恒载剪力，其总值为

$$V_{B左}=-51.6-100-336/6.64=-202\text{kN}$$

右跨剪力与上述两值形成反对称图形［图 11.30(k)］。

本 章 小 结

本章讨论了如何利用影响线，求解梁在移动荷载作用下的支座反力、内力的计算问题；介绍了移动荷载、影响线的概念，特别强调了弯矩的影响线与弯矩图的区别，见表 11－1。

表 11－1　弯矩的影响线与弯矩图的区别

线型	荷载	截面	横坐标	纵坐标
M影响线	$P=1$ 的移动荷载	某个指定截面	$P=1$ 的位置	$P=1$ 移到该位置时，指定截面的弯矩值
M图	大小、位置固定的荷载	各个截面	截面的位置	固定荷载作用下，该截面的弯矩值

绘制影响线有静力法和机动法。静力法是绘制影响线的基础，机动法是绘制影响线的重点。机动法绘制静定梁影响线具有如下规律：去掉所求影响量值的联系，梁成为可变体；一个刚片，其上的影响线为一段直线；竖向支座处，影响线必为零点；滑动约束两侧的影响线是平行线。

利用影响线可求指定影响量值。

当有一组集中荷载 P_1，P_2，…，P_n作用于梁上，而梁的某一量值 Z 的影响线在各荷载作用处的纵坐标为 y_1，y_2，…，y_n时，则该量值为

$$Z = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \cdots + P_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot y_i$$

当梁受到均布荷载 q 作用时，若 y 为该梁某种量值 Z 的影响线，则对 AB 段上的整个均布荷载而言，它使梁产生的 Z 值应为

$$Z = \int_A^B q\,\mathrm{d}x \cdot y = q \cdot \int_A^B y\,\mathrm{d}x = q \cdot \int_A^B \mathrm{d}A = q \cdot A$$

利用影响线可确定最不利荷载位置、计算反力或内力值、绘制简支梁的包络图、推导出简支梁在移动荷载作用下的绝对最大弯矩计算公式。

本章还介绍了超静定梁的影响线和连续梁的包络图及连续梁的不利荷载布置，其结果将直接用于结构设计中。

关键术语

移动荷载(movable load)；影响线(influence line)；静力法(static method)；机动法(kinematical method)；临界荷载(critical load)；临界位置(critical position)；最不利荷载位置(the most unfavorable load position)；绝对最大弯矩(absolute maximum bending moment)；包络图(envelope diagram)。

习题 11

一、思考题

1. 影响线的定义是什么？有无均布荷载的影响线？
2. 影响线的横坐标 x 和竖坐标 y 各代表什么物理意义？
3. 用静力法作某内力影响线与在固定荷载作用下求该内力有何异同？
4. 某截面的剪力影响线在该截面处是否一定有突变？突变处左右两竖标各代表什么意义？突变处两侧的线段为何必定平行？
5. 间接荷载作用时，影响线的特点是什么？
6. 桁架影响线为何要区分上弦承载还是下弦承载？在什么情况下两种承载方式的影响线是相同的？
7. 恒载作用下的内力为何可以利用影响线求解？
8. 何谓最不利荷载位置？何谓临界荷载？

9. 简支梁的绝对最大弯矩与跨中截面最大弯矩是否相等？什么情况下两者会相等？

10. 何谓内力包络图？它与内力图、影响线有何区别？三者各有何用途？

11. 为何静定梁的影响线一定是直线，超静定梁的影响线一定是曲线？

二、填空题

1. 用影响线求多个集中荷载作用下的影响量的公式是____________________。

2. 用静力法作影响线时，其影响线方程是____________；用机动法作影响线时，其形状为某机构的________________。

3. 简支梁的绝对最大弯矩发生在________附近，其具体位置可用公式 $x=$____________确定。

4. 绘制影响线的基本方法可分为________和____________。

5. 多跨静定梁附属部分某量值影响线，在___________范围内必为零，在___________范围内为直线或折线。

6. 图 11.31(b)是图 11.31(a)的____________的影响线，竖标 y_C 表示 $P=1$ 作用在____________截面时____________的数值。

7. 图 11.32(b)是图 11.32(a)结构____________截面的____________影响线。

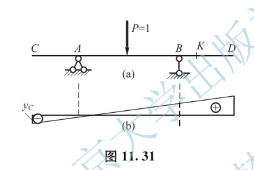


图 11.31

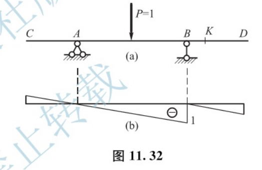


图 11.32

8. 图 11.33(b)是图 11.33(a)的________的影响线，竖标 y_D 表示 $P=1$ 作用在________截面时________的数值。

9. 图 11.34 所示静定梁 M_C影响线在 C 点的竖标 $y_C=$____________。

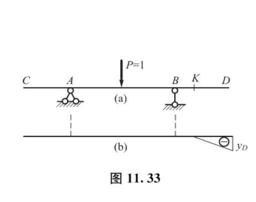


图 11.33

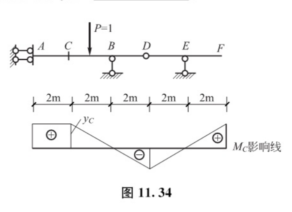


图 11.34

10. 简支梁的绝对最大弯矩是在________荷载作用下简支梁内各截面的最大弯矩中的________值。

11. 机动法画影响线，主要应用____________原理。

12. 图 11.35 所示跨度为 10m 的简支梁，受均布恒载 $q=60\text{kN/m}$ 和均布活载 $P=$

100kN/m(长度大于跨度)的作用。截面 C 可能达到的最大剪力为________ kN；可能达到的最小剪力为________ kN。

13. 图 11.36 所示结构的绝对最大弯矩发生在离 A 点________ m 处。

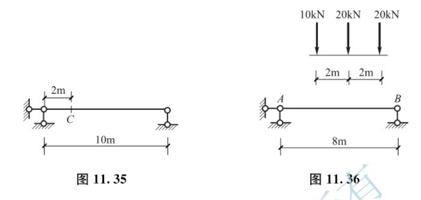


图 11.35　　图 11.36

三、判断题

1. 影响线用于解决活载作用下结构的计算问题，它不能用于恒载作用下的计算。(　　)

2. 用静力法作影响线，影响线方程中的变量 x 代表截面位置的坐标。(　　)

3. 某一影响线，只能反映一个既定量值的变化规律。(　　)

4. 静定梁某截面弯矩的临界荷载位置一般就是最不利荷载位置。(　　)

5. 结构基本部分某截面某量值的影响线在附属部分的影响线竖标值为零。(　　)

6. 水平梁上某截面剪力影响线在该截面左、右影响量绝对值之和为 1。(　　)

7. 静定结构的内力影响线都是由直线组成的。(　　)

8. 绝对最大弯矩是移动荷载下梁的各截面上最大弯矩的最大值。(　　)

9. 由影响线方程或机动法可知，静定结构的反力、内力影响线一定由直线或折线构成。(　　)

10. 影响线不仅可以用来计算移动荷载作用下的内力值，而且同样也可以用来计算固定荷载作用下的内力值。(　　)

11. 根据多跨静定梁的受力特性可知，基本部分截面上内力、反力的影响线遍及该部分以及其他附属部分。而附属部分的反力、截面内力影响线，仅限于该部分。(　　)

12. 简支梁跨中 C 截面剪力影响线在 C 截面处有突变。(　　)

13. 图 11.37(b)是图 11.37(a)所示结构的 M_A 影响线。(　　)

14. 图 11.38(a)所示梁的 M_C 影响线、M_B 影响线形状如图 11.38(b)、(c)所示。(　　)

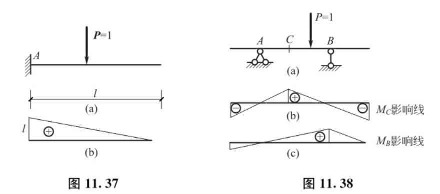


图 11.37　　图 11.38

15. 图 11.39 所示梁的绝对最大弯矩发生在距支座 A 为 6.625m 处。(　　)

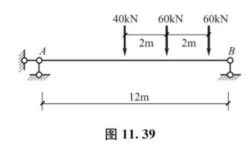


图 11.39

16. 梁 AB 在图 11.40 所示移动荷载作用下，截面 K 的弯矩最大值为 209.4kN·m。(　　)

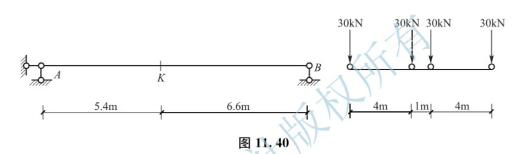


图 11.40

四、选择题

1. 绘制任一量值的影响线时，假定荷载是(　　)。

A. 一个方向不变的单位移动荷载　　B. 移动荷载

C. 动力荷载　　D. 可动荷载

2. 机动法作静定梁影响线应用的原理为(　　)。

A. 变形条件　　B. 平衡条件

C. 虚功原理　　D. 叠加原理

3. 移动荷载的定义是(　　)。

A. 大小、方向、作用位置随时间改变的荷载

B. 大小不变，方向及作用位置随时间改变的荷载

C. 方向不变，大小及作用位置随时间改变的荷载

D. 大小、方向不变，作用位置随时间改变的荷载

4. 绘制图 11.41 所示结构 V_C 的影响线时，其中 ACD 部分为(　　)。

A. AC 不为零，CD 为斜线

C. AC 为零，CD 为斜线

B. AC 为零，CD 为水平线

D. AC 为零，CD 为零

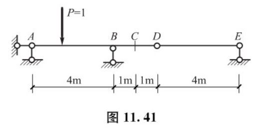
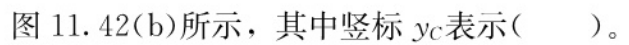


图 11.41

5. 图 11.42(a)所示结构 M_E 的影响线如图 11.42(b)所示，其中竖标 y_C 表示(　　)。



A. $P=1$ 在 E 时，C 截面的弯矩值　　B. $P=1$ 在 C 时，A 截面的弯矩值

C. $P=1$ 在 C 时，E 截面的弯矩值　　D. $P=1$ 在 C 时，D 截面的弯矩值

6. 图 11.43(a)所示结构 M_C 影响线如图 11.43(b)所示，其中竖标 y_E 是(　　)。

A. $P=1$ 在 E 时，D 截面的弯矩值　　B. $P=1$ 在 C 时，E 截面的弯矩值
C. $P=1$ 在 E 时，B 截面的弯矩值　　D. $P=1$ 在 E 时，C 截面的弯矩值

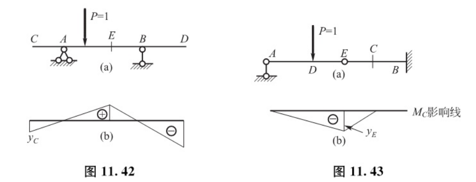


图 11.42　　图 11.43

7. 已知图 11.44 所示静定梁 M_C 的影响线，当梁承受全长均布荷载时，则(　　)。
A. $M_C>0$　　B. $M_C<0$
C. $M_C=0$　　D. M_C 不定，取决于 a 值

8. 图 11.45 所示结构中截面 C 的剪力影响线在 D 处的竖标为(　　)。
A. 0　　B. $\frac{a}{l}$　　C. $\frac{c}{l}$　　D. l

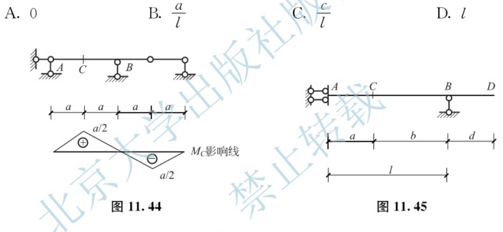


图 11.44　　图 11.45

9. 图 11.46 所示梁发生绝对最大弯矩的截面位置距支座 A 为(　　)。
A. 5.34m　　B. 6m　　C. 6.67m　　D. 4.87m

10. 图 11.47 所示梁在移动荷载作用下支座 B 的反力最大值为(　　)。
A. 110kN　　B. 100kN　　C. 120kN　　D. 160kN

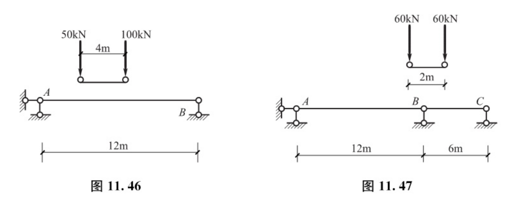


图 11.46　　图 11.47

11. 图 11.48 所示梁在移动荷载作用下，使截面 C 的弯矩达到最大值的临界荷载为(　　)。
A. 50kN　　B. 40kN　　C. 60kN　　D. 80kN

12. 图 11.49 所示简支梁在移动荷载作用下截面 K 的最大弯矩值是(　　)。

A. 140kN·m　　B. 90kN·m　　C. 160kN·m　　D. 150kN·m

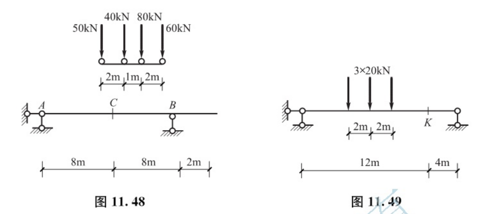


图 11.48　　图 11.49

13. 图 11.50 所示简支梁在移动荷载作用下，使截面 C 产生最大弯矩时的临界荷载是(　　)。

A. 7kN　　B. 3kN　　C. 10kN　　D. 5kN

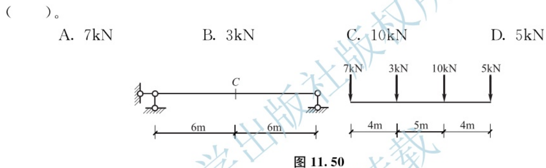


图 11.50

五、计算题

1. 试用静力法作图 11.51 所示结构中指定量值的影响线。

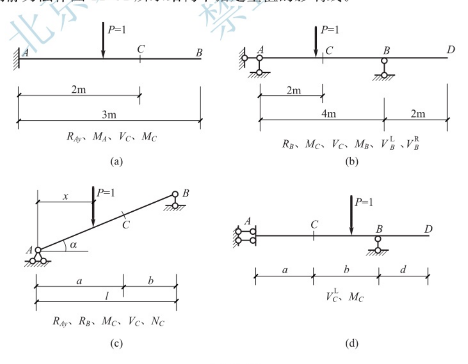
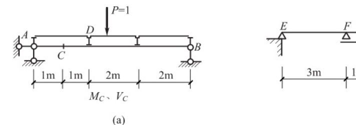


图 11.51

2. 用静力法作图 11.52 所示静定梁在间接荷载作用下指定量的影响线。



(a)

E F G P=1 H

A C D B

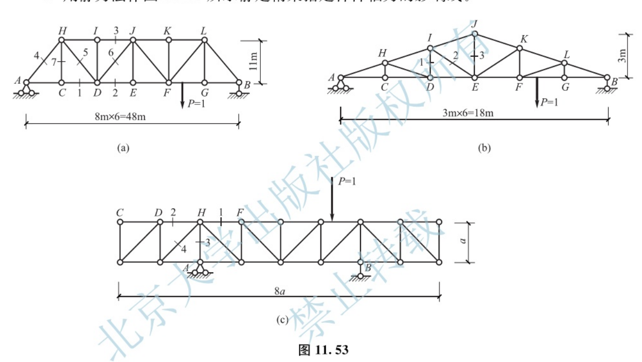
3m 1m 2m 1m 2m 3m 1m 2m

R_A、M_C、V_C、V_D^L、V_D^R

(b)

图 11.52

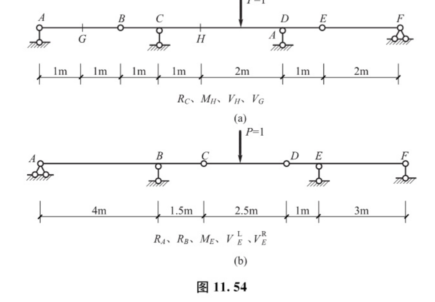
3. 用静力法作图 11.53 所示静定桁架指定杆件轴力的影响线。



(c)

图 11.53

4. 用机动法作图 11.54 所示多跨静定梁中指定量值的影响线。



(b)

图 11.54

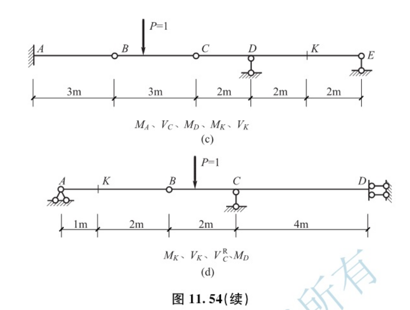


图 11.54(续)

5. 试利用影响线求下列结构在图 11.55 所示固定荷载作用下指定量值的大小。

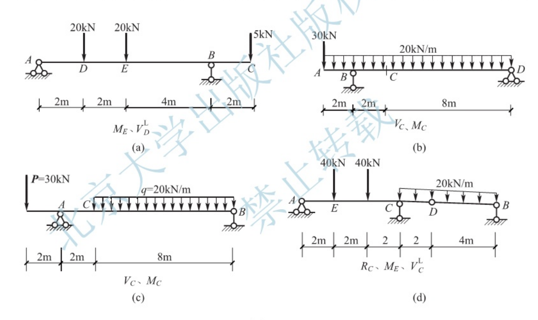


图 11.55

6. 试求图 11.56 所示简支梁在移动荷载作用下截面 C 的最大弯矩、最大正剪力和最大负剪力。

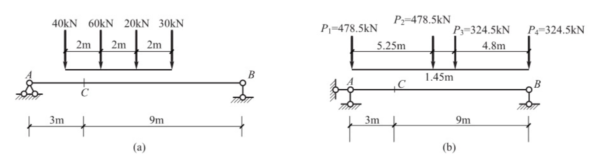


图 11.56

7. 两台吊车如图 11.57 所示，试求吊车梁的 M_C、V_C 的荷载最不利位置，并计算其最大值(和最小值)。

8. 两台吊车同图 11.57，试求图 11.58 所示支座 B 的最大反力。

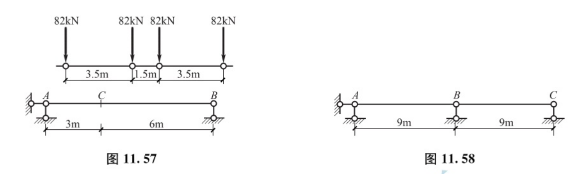


图 11.57　　图 11.58

9. 试求图 11.59 所示简支梁在移动荷载作用下的绝对最大弯矩。

10. 求图 11.60 所示简支梁的绝对最大弯矩，并与跨中截面的最大弯矩相比较。

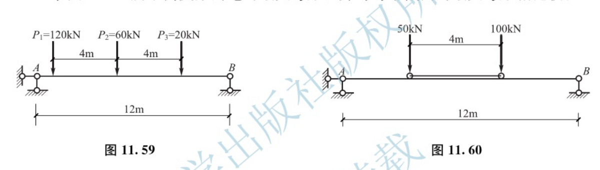


图 11.59　　图 11.60

11. 绘制图 11.61 所示多跨超静定梁 M_C 的影响线，并绘出其上侧受拉的不利均布荷载布置图。

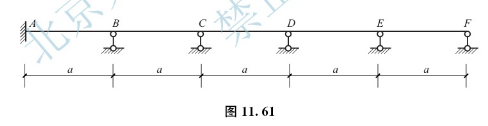


图 11.61

第12章 结构动力学

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
结构动力学基本原理和方法	熟悉	动力荷载的分类、动力自由度的确定方法
	掌握	单自由度体系的振动方程、自由振动和强迫振动
	熟悉	共振和阻尼
	理解	两个自由度体系的振动

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
振动方程	掌握	建筑抗震设计
共振和阻尼	熟悉	结构参数的计算



导入案例

通行三天就关闭了的“千禧桥”

“千禧桥”是英国伦敦泰晤士河上近100年来新建的一座北接圣保罗大教堂、南连伦敦泰特现代艺术馆和伦敦环球剧院的步行桥(图12.1)，这座专供行人步行的“千禧桥”是英国为迎接新千年的到来而特意建造的，由英国著名建筑家福斯特爵士和雕塑家卡罗设计。大桥长320m，由1090块闪闪发光的钢铁连接而成，耗资1820万英镑，于2000年6月10日首次对公众开放。然而，不知道是上面行人的重力太大还是由于夏季缓缓微风的吹拂，这座新桥开始摇晃起来，而且摇晃得很厉害。人们因此叫它“跳动的桥”。在开放的头3天里，大约有18万人排起了长队，争相过桥。像所有的悬吊大桥一样，人们也曾想到过这座千禧大桥有可能会轻微摆动。但是，当桥出现这种轻微摆动时，过桥的人群也采取了相应的举动。当晃动渐渐增强到明显时，所有的人又一起试图放慢他们的脚步，于是又引起了一个干扰波动影响。这种运动使得桥身晃动并且与人们的步调一致，而且晃动也越来越大。千禧桥管理委员会的一名发言人表示，建筑物摇晃本来是正常的事，但是这座桥的摇晃程度超出了它应该摇晃的程度。3天后，有关部门就不得不下令关闭这座桥，以便让工程师们对它进行一次彻底的研究调查。



图 12.1

工程师们认为过桥人数太多，大家“步伐一致”的共振效应是导致桥身严重摇晃的主要原因。工程师们非常清楚这一点并曾建议当局在桥上挂上一块警告牌，就像阿尔伯特大桥上的那块一样。在那座建于 1873 年维克多利亚时期的大桥有一个金属牌警告标志，至今仍不厌其烦地告诉人们：所有过桥部队到此必须打乱脚步。

“千禧桥”基金会在对桥身摇晃问题进行调查研究后，决定筹资 500 万英镑，用来改进桥体结构。2001 年 5 月开始，设计师 Foster、Partners、Anthony Caro 和工程团队便开始替千禧桥安装避振装置。施工部门在这座 320m 长的步行桥上加装了 91 个类似汽车用的弹性减振器来吸收振动力的装置。2002 年 1 月 30 日，2000 名主要由建筑师、工程师和其他专业人士组成的“过桥人”傍晚走上千禧大桥漫步时，它一点也没有摇晃。2002 年 2 月 22 日“千禧桥”又重新向公众开放。

英国伦敦新建的千禧大桥因为工程学上的神秘现象而关闭，并不是新奇事，其实早在 1940 年 11 月 7 日，美国著名的塔科马大桥就在时速为 40mile(1mile＝1609.344m)的风力扰动下发生了坍塌事件，当时震惊了整个工程界。2010 年 5 月 19 日晚，俄罗斯的伏尔加河大桥也发生了离奇晃动，桥面呈浪型翻滚，正在桥上行驶的车辆也跟着翻滚。俄专家表示，大桥共振现象是因风波动和负载而引起的。这些都是需要我们在结构动力学里面对其进行研究的内容。

12.1 概　述

1. 结构动力计算的特点和目的

前面各章讨论了在静荷载作用下的结构计算问题。所谓静荷载是指大小、方向和作用位置都不随时间变化的荷载。建筑结构，除承受静荷载作用外，还会经常遇到动荷载的作用。比如，机械转动对结构的作用；桩机对基础的作用；快速行驶的车辆对桥梁的作用；地震对建筑物的作用等。动荷载是指大小、方向和作用位置随时间迅速改变的荷载。在动荷载作用下，结构将产生振动和加速度，为此动力计算时必须考虑惯性力的影响。区分静荷载与动荷载，不能单纯从荷载本身的性质来确定，更主要是看其对结构的影响。严格说来，结构上所受的荷载都是随时间变化的。若荷载随时间变化缓慢，引起结构质量的加速度很小，由此所产生的惯性力与荷载相比可以忽略不计，则可将其作为静荷载处理。只有当荷载随时间变化较快，并且所产生的惯性力不容忽视时，才将其视为动荷载进行分析计算。

在动荷载作用下，结构产生的内力和位移不仅是位置的函数，也是时间的函数。它们统称为动力响应。结构动力学就是研究在动荷载作用下结构动力响应规律的学科，其任务

是求出它们的最大值作为结构设计的依据。

2. 动荷载的分类

根据动荷载随时间变化的规律，工程中常见的动荷载可分为如下几种。

1）周期荷载

这类荷载随时间作 t 周期性的变化，如图 12.2(a)所示。周期荷载中最简单也是最重要的一种荷载称为简谐荷载，即荷载随时间按正弦(或余弦)规律变化，如图 12.2(b)所示。

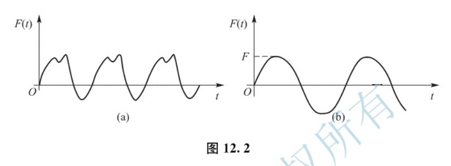


图 12.2

2）冲击荷载

这类荷载短时间内，荷载急剧增大［图 12.3(a)］或减小［图 12.3(b)］。各类爆炸荷载属这一类。

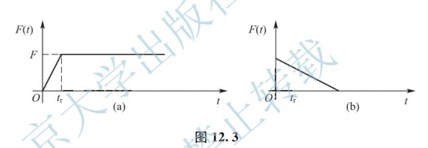


图 12.3

3）突加荷载

这是在瞬间突然施加在结构上且保持一段较长时间的荷载，如图 12.4 所示。如吊车的制动力对结构的作用；在结构上突然放置一重物对结构的作用均属这一类。

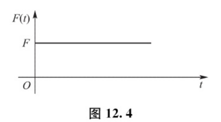


图 12.4

4）随机荷载

前面提到的荷载都属于确定性的荷载，即荷载的变化是时间的确定性函数。如果荷载事先不可预知，在任一时刻其数值是随机量，其变化规律不能用确定的函数关系进行表示，则这种荷载称为随机荷载。如脉动风和地震对结构的作用等。

随机荷载对结构的动力分析要用到数理统计的方法，将其称为结构的随机振动分析。本章只涉及确定性荷载的作用。

12.2 结构振动的自由度

动力计算时除考虑直接作用在结构上的动荷载之外，还必须考虑结构的惯性力的影

响，为此，在选定动力计算简图时，必须考虑质量分布情况及其在振动过程中质量位置的确定问题。通常动力计算是以质量的位移作为基本未知量，由于结构上各质点之间存在一定约束，也就是质点的位移不一定相互独立，因而动力计算的基本未知量应为独立的质点位移。这个问题可通过分析结构振动的自由度来解决。

在结构振动时，结构将发生弹性变形，其上的质点将随结构的变形而振动。确定结构的全部质点在任一时刻的位置所需要的独立几何参数的数目，称为结构的振动自由度。由此可知，结构振动自由度等于结构全部质点的独立位移的个数。

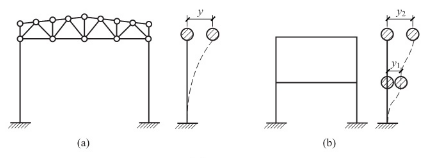
实际结构的质量都是连续分布的，要确定其质量的位置需要无限多个独立的几何参数，也就是说实际结构都是无限自由度的体系。若所有结构都按无限自由度体系进行动力计算，不仅十分困难，而且没有必要。在计算结果可靠、计算方法简便易行的前提下，通常将无限自由度体系简化为单自由度或多个自由度的体系。将实际结构简化成有限自由度体系的方法很多，本章仅介绍集中质量法。这种方法是将结构的连续分布的质量集中在结构的若干点，即结构动力计算简图为有限质点体系。如图 12.5 所示的简支梁，简化时，可将梁部分质量集中在梁的一点［图 12.5(a)］或若干点［图 12.5(b)］。显然，集中质点越多越接近原结构。


(a) (b)

图 12.5

计算结构振动的自由度，是由确定全部质点位置所需独立参数的数目来判定的。对于杆系结构质点惯性力矩对结构动力响应的影响很小，可忽略不计，因而质点的角位移不作为基本未知量。为了进一步减少结构振动的自由度，对于受弯杆件通常还忽略轴向变形的影响，即假定变形后杆上任意两点之间距离保持不变。这样图 12.5(a)所示为一个自由度体系(单自由度体系)，图 12.5(b)所示为三个自由度体系。

图 12.6(a)所示为一铰结排架，当计算水平力作用下的水平振动时，因厂房的屋盖和屋架的质量较大，当柱的质量相对较小时，可将柱的质量集中于柱两端。这时排架的质量都集中于柱的顶部，且在水平振动时，忽略屋架的轴向变形，可认为排架两柱的柱顶水平位移相同，因此，体系简化为一个自由度，计算简图示于排架旁。图 12.6(b)所示两层刚架，计算侧向振动时，则可简化为质量集中于楼层的两个自由度体系，计算简图示于刚架旁。



(a) (b)

图 12.6

图 12.7(a)所示的静定刚架上只有一个质量，但为两个自由度体系，图 12.7(b)所示的超静定刚架柱顶上有两个质量，但却为一个自由度体系。

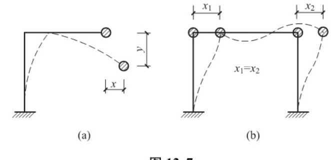


图 12.7

由以上几个例子可知，体系的振动自由度与确定质量位置所需独立几何参数的数目有关，与质量的数目并无直接关系，与体系的静定或超静定也无关。

12.3 单自由度体系的自由振动

结构在没有动力荷载作用时，由初始干扰(如初位移或初速度)的影响所引起的振动称为自由振动。由于单自由度体系具有一般振动体系的一些共同特性，对其的研究是分析其他振动的基础，同时，许多实际结构可简化成单自由度体系进行分析，因此单自由度体系的动力分析是非常重要的。

1. 不考虑阻尼时的自由振动

1）振动微分方程的建立

在结构动力计算中，一般取结构质点的位移为基本未知量，为求解它们，应建立体系的振动方程。在此介绍以达朗贝尔原理为依据的动静法。这种方法是将惯性力加于质点上作为平衡问题来建立运动方程。利用动静法建立自由振动微分方程有两种方法：柔度法和刚度法。现结合图 12.8 讨论单自由度体系的自由振动微分方程的建立。

图 12.8(a)所示的悬臂立柱在顶部有一重物，质量为 m，设柱本身质量比 m 小得多，可忽略不计，因此，体系为单自由度体系。

在建立自由振动微分方程之前，先把图 12.8(a)中的体系用图 12.8(b)所示的弹簧模型来表示。原来由立柱对质量 m 所提供的弹性力用弹簧来提供。因此，弹簧的刚度系数 k(使弹簧发生单位位移时所需施加的力)应与立柱的刚度系数(使柱顶发生单位水平位移时在柱顶所需施加的水平力)相等。

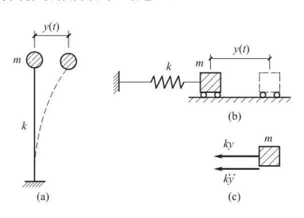


图 12.8

(1) 刚度法(列动平衡方程)。

设质点 m 在振动中任一时刻的位移为 $y(t)$。取质点 m 为隔离体［图 12.8(c)］，并分析其受力情况：弹性恢复力 ky，其中 k 为刚度系数，与质点位移的方向相反；惯性力$-m\ddot{y}(t)$，它与质点加速度的方向相反。

由达朗贝尔原理，可列出隔离体的动平衡方程：

$$m\ddot{y}+ky=0 \tag{12-1}$$

这就是单自由度体系自由振动的微分方程。

(2) 柔度法(列位移方程)。

将惯性力 $F_1=-m\ddot{y}(t)$作为静力荷载加于体系的质点上，则惯性力 F_1 引起的位移等于质点的位移 $y(t)$。设立柱的柔度系数为 δ(单位荷载作用下柱顶的水平位移)，其值与刚度系数互为倒数：

$$\delta=\frac{1}{k} \tag{a}$$

则质量 m 的位移为：

$$y(t)=F_1\delta=-m\ddot{y}(t)\delta \tag{12-2}$$

将式(a)代入式(12-2)可知式(12-2)和式(12-1)是相同的。

2) 自由振动微分方程的解答

单自由度体系自由振动微分方程(12-1)还可写为：

$$\ddot{y}+\omega^2 y=0 \tag{12-3}$$

其中

$$\omega^2=\frac{k}{m},\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{12-4}$$

式(12-3)是一个二阶常系数微分方程，其通解为：

$$y(t)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t \tag{b}$$

由初始条件　$y(0)=y_0$，$\dot{y}(0)=v_0$

得

$$C_1=\frac{v_0}{\omega},\quad C_2=y_0$$

代入式(b)得

$$y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{12-5}$$

由此可见，振动是由两部分组成的，一部分由初位移 y_0 引起的；另一部分由初速度 v_0引起。

式(12-5)还可改写为：

$$y(t)=a\sin(\omega t+\alpha) \tag{12-6}$$

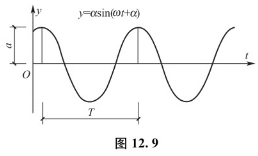


图 12.9

其图形如图 12.9 所示。

其中 $a=\sqrt{y_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$，$\alpha=\tan^{-1}\frac{y_0\omega}{v_0}$　(12-7)

式中，a 为振幅，最大位移；α 为初相位。

3) 结构的自振周期和自振频率

式(12-6)右边周期函数的周期为：

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{12-8}$$

可以验证式(12-6)中的位移 y 确实满足周期运动的下列条件：

$$y(t+T)=y(t)$$

自振周期的倒数称为频率 f，其计算式如下：

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \tag{12-9}$$

式中，频率 f 表示单位时间内的振动次数，Hz。

由式(12－8)得

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f \tag{12-10}$$

式中，ω 称为圆频率。

下面给出自振周期的几种形式：

(1) 将式(12－4)代入式(12－8)，得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{12-11a}$$

(2) 将 $\delta=\frac{1}{k}$ 代入式(12－11b)，得

$$T=2\pi\sqrt{m\delta} \tag{12-11b}$$

(3) 将 $m=\frac{W}{g}$ 代入式(12－11b)，得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{W\delta}{g}} \tag{12-11c}$$

(4) 令 $\Delta_{st}=W\delta$，代入式(12－11c)，得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\Delta_{st}}{g}} \tag{12-11d}$$

$\Delta_{st}=W\delta$ 表示在质点上沿振动方向施加数值为 W 的荷载时质点沿振动方向所产的静位移。

同样利用式(12－10)和式(12－11)可得圆频率 ω 的计算公式：

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{1}{m\delta}}=\sqrt{\frac{g}{W\delta}}=\sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} \tag{12-12}$$

结构自振周期和自振频率的性质如下。

(1) 自振周期与自振频率只与结构的刚度和质量有关，与外界的干扰因素无关。因此，自振周期和自振频率是反映结构的固有性质，也称固有周期和固有频率。

(2) 质量越大，周期越大，频率越小；刚度越大，周期越小，频率越大。也就是说，要调整体系的自振频率，可从改变体系的刚度和质量入手。

【例 12－1】 图 12.10 所示三种支承情况的梁，其跨度均为 l，且 EI 都相等，在中点有一集中质量 m。当不考虑梁的自重时，试比较这三者的自振频率。

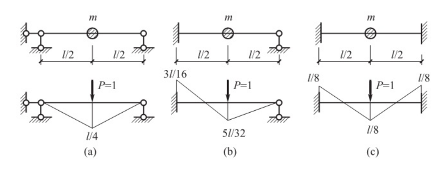


图 12.10

解： 质量 m 沿梁竖向振动，为计算柔度系数 δ，在梁跨中质量 m 处，加一竖向单位力 $P=1$，作出单位力作用下的弯矩图，由图乘法可得

$$\delta_1=\frac{l^3}{48EI},\quad \delta_2=\frac{7l^3}{768EI},\quad \delta_3=\frac{l^3}{192EI}$$

代入式(12－12)即可求出三种情况的自振频率分别为：

$$\omega_1=\sqrt{\frac{48EI}{ml^3}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{768EI}{7ml^3}},\quad \omega_3=\sqrt{\frac{192EI}{ml^3}}$$

据此可得

$$\omega_1:\omega_2:\omega_3=1:1.51:2$$

此例说明随着结构刚度的加大，其自振频率也相应地增大。

【例 12－2】 如图 12.11 所示为一单层刚架，横梁的总质量为 m，柱的质量可以忽略不计。求刚架的水平自振频率。

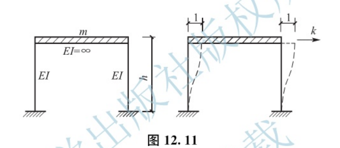


图 12.11

解：(1) 求刚架的水平侧移刚度系数 k。

$$k=2\times\frac{12EI}{h^3}=24\frac{EI}{h^3}$$

(2) 自振频率。

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{24EI}{mh^3}}$$

2. 阻尼对单自由度体系自由振动的影响

以上所讨论的是在忽略阻尼影响的条件下单自由度体系的自由振动。实际结构在振动过程中总是存在阻尼的。所谓阻尼，就是结构在振动时来自外部和内部使其能量损耗的作用。例如，外部介质的阻力、构件连接处及材料内部微粒之间的摩擦等。由于确切估计阻尼的作用是一个复杂的问题，根据对阻尼力的描述不同，存在不同的阻尼理论。为使计算简单，通常在结构动力分析中采用粘滞阻尼理论，即认为振动中物体所受的阻尼力与其运动速度成正比，方向与速度方向相反。若用 $R(t)$ 表示粘滞阻尼力，则

$$R(t)=-c\dot{y} \tag{12－13}$$

c 称为阻尼常数，由试验可确定。

当考虑阻尼时，质点 m 所受的力如图 12.12 所示。列动力平衡方程，则有

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=0 \tag{12－14}$$

设
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

并令

$$\xi=\frac{c}{2m\omega} \tag{12-15}$$

式中，ξ 为阻尼比。

图 12.12

则有阻尼的单自由度体系自由振动微分方程可写为：

$$\ddot{y}+2\xi\omega\dot{y}+\omega^2 y=0 \tag{12-16}$$

式(12-16)为线性常系数齐次微分方程。

特征方程为：

$$\lambda^2+2\xi\omega\lambda+\omega^2=0$$

特征方程的根为：

$$\lambda=\omega(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1})$$

根据阻尼的大小，即 ξ 取值不同，可得出三种不同的运动状态，分述如下。

(1) $\xi<1$ 的情况(低阻尼情况)。

令 $\omega_r=\omega\sqrt{1-\xi^2}$ （低阻尼体系的自振圆频率） (12-17)

则 $\lambda=-\xi\omega+\omega_r i$

此时，微分方程式(12-16)的解为：

$$y=e^{-\xi\omega t}(C_1\cos\omega_r t+C_2\sin\omega_r t)$$

由初始条件 $y(0)=y_0$，$\dot{y}(0)=v_0$

得 $C_1=y_0$，$C_2=\dfrac{v_0+\xi\omega y_0}{\omega_r}$

于是得

$$y=e^{-\xi\omega t}\left(y_0\cos\omega_r t+\frac{v_0+\xi\omega y_0}{\omega_r}\sin\omega_r t\right) \tag{12-18}$$

式(12-18)也可写成 $y=e^{-\xi\omega t}a\sin(\omega_r t+\alpha)$ (12-19)

其中 $a=\sqrt{y_0^2+\left(\dfrac{v_0+\xi\omega y_0}{\omega_r}\right)^2}$，$\alpha=\tan^{-1}\dfrac{y_0\omega_r}{v_0+\xi\omega y_0}$

讨论：

① 低阻尼的振动是一衰减运动，衰减曲线如图 12.13 所示。

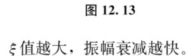


图 12.13

② 低阻尼对自振频率的影响。

因 $\xi<1$，$\omega_r<\omega$。一般建筑物 ξ 在 0.01～0.1 之间。当 $\xi<0.2$ 时，ω_r/ω 在 0.96～1.0 之间，ω_r 与 ω 很接近。因此，在 $\xi<0.2$ 时，阻尼对自振频率的影响不大，可以忽略。

③ 阻尼对振幅的影响。

振幅为 $ae^{-\xi\omega t}$，振幅随时间按对数规律衰减。经过一个周期后，相邻两个振幅之比为：

$$\frac{y_{k+1}}{y_k}=\frac{ae^{-\xi\omega(t_k+T)}}{ae^{-\xi\omega t_k}}=e^{-\xi\omega T}$$

ξ 值越大，振幅衰减越快。

④ 阻尼比的确定。

$$\ln\frac{y_k}{y_{k+1}}=\xi\omega T=\xi\omega\frac{2\pi}{\omega_r}$$

当 $\xi<0.2$ 时，$\frac{\omega}{\omega_r}\approx 1$，有 $\ln\frac{y_k}{y_{k+1}}=2\pi\xi$，称为振幅的对数衰减率。

相隔 n 个周期，有

$$\xi=\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{y_k}{y_{k+n}} \tag{12-20}$$

测出两个振幅值 y_k 和 y_{k+1} 及相隔周期数 n 后，即可推算出 ξ 值。

(2) $\xi=1$ 的情况(临界阻尼情况)。

$$\lambda=\omega(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1})=-\omega$$

则

$$y=(C_1+C_2t)e^{-\omega t}$$

由初始条件　$y(0)=y_0$，　$\dot{y}(0)=v_0$

得　　$C_1=y_0$，　$C_2=v_0+y_0\omega$

则　　$y=[y_0(1+\omega t)+v_0t]\,e^{-\omega t}$　　(12-21)

体系从初始位移 y_0 出发，逐渐回到静平衡位置而无振动发生，如图 12.14 所示。

图 12.14

$\xi=1$ 时的阻尼常数 c 称为临界阻尼常数 c_r，其计算式如下。

$$c_r=2m\omega \tag{12-22}$$

临界阻尼比为：

$$\xi=\frac{c}{c_r} \tag{12-23}$$

(3) $\xi>1$ 的情况(强阻尼情况)。

体系不出现振动现象，这种情况实际问题中很少遇到，不予讨论。

【例 12-3】 图 12.15 所示排架，横梁 $EA=\infty$，横梁及柱的部分质量集中在横梁处，结构为单自由度体系。为进行振动试验，在横梁处加一水平力 P，柱顶产生侧移 $y_0=0.6$cm，这时突然卸除荷载 P，排架作自由振动。振动一周后，柱侧移为 0.45cm。试求排架的阻尼比 ξ 及振动 10 周后柱顶的振幅 y_{10}。

图 12.15

解：(1) 求 ξ。

假设阻尼比 $\xi<0.2$，$\omega_r\approx\omega$，因此，可用式(12-20)计算 ξ。

$$\xi=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{y_k}{y_k+1}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{0.6}{0.54}=0.0186$$

(2) 求振动 10 周后的振幅。

$$\xi=\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{y_0}{y_{10}}$$

$$\ln\frac{y_0}{y_{10}}=2\pi n\xi=2\pi\times 10\times 0.0168=1.056$$

$$\frac{y_0}{y_{10}}=e^{1.056}=2.875$$

则 $y_{10}=\frac{0.6}{2.875}=0.21\ \text{cm}$

12.4 单自由度体系在简谐荷载作用下的受迫振动

结构在动荷载即外来干扰力的作用下产生的振动称为受迫振动或强迫振动。研究受迫振动的目的是确定结构的最大动位移和最大动内力。本节讨论动荷载为简谐荷载时的情况。

1. 不考虑阻尼时的受迫振动

1) 振动微分方程的建立及解答

如图 12.16 所示体系受简谐荷载的作用，即

$$P(t)=F\sin\theta t$$

式中，F 为简谐荷载的荷载幅值(或振幅)；θ 为荷载的频率。

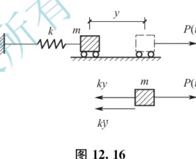


图 12.16

由动力平衡条件，得

$$m\ddot{y}+ky=P(t)$$

令

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

则

$$\ddot{y}+\omega^2 y=\frac{F}{m}\sin\theta t \tag{12-24}$$

式(12-24)为二阶线性常系数非齐次微分方程，其通解为：

$$y=\bar{y}+y^*$$

式中，$\bar{y}$为齐次方程的通解；y^* 为非齐次方程的一个特解。

设齐次方程的通解为：

$$\bar{y}=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$$

设特解为

$$y^*=A\sin\theta t \tag{a}$$

式中，A 为待定系数，将式(a)代入式(12-24)，得

$$-A\theta^2\sin\theta t+\omega^2 A\sin\theta t=\frac{F}{m}\sin\theta t$$

由此得

$$A=\frac{F}{m(\omega^2-\theta^2)}$$

因此，特解

$$y^*=\frac{F}{m(\omega^2-\theta^2)}\sin\theta t$$

于是方程的通解

$$y(t)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t+\frac{F}{m(\omega^2-\theta^2)}\sin\theta t$$

设初始条件

$$y(0)=0,\quad \dot{y}(0)=0$$

则得：$C_1=-\frac{F\theta}{m\omega(\omega^2-\theta^2)}$，$C_2=0$

于是得

$$y(t)=-\frac{F\theta}{m\omega(\omega^2-\theta^2)}\sin\omega t+\frac{F}{m(\omega^2-\theta^2)}\sin\theta t \tag{12-25}$$

振动是由两部分组成，第一部分是按自振频率 ω 的振动，第二部分是按荷载频率 θ 的振动，称为纯强迫振动或稳态强迫振动。由于振动过程中存在阻尼力，按自振频率 ω 的振动将会逐渐消失，最后只剩下按荷载频率 θ 的振动。我们把两部分同时存在的阶段称为"过渡阶段"，而把后来只按荷载频率振动的阶段称为"平稳阶段"。在实际问题中平稳阶段动力分析更为重要。

2）纯强迫振动分析

由式(12－25)可知纯强迫振动的质点位移为：

$$y(t)=\frac{F}{m(\omega^2-\theta^2)}\sin\theta t=\frac{F}{m\omega^2\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}\sin\theta t \tag{12-26}$$

由于

$$\omega^2=\frac{k}{m}=\frac{1}{m\delta}$$

所以

$$\frac{F}{m\omega^2}=F\delta$$

令

$$y_{st}=F\delta$$

式中，y_{st} 为将动荷载的幅值 F 作为静荷载作用于结构时所引起的位移，称为静位移。

则得

$$y(t)=y_{st}\frac{1}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}\sin\theta t$$

最大动位移(即振幅)为：

$$[y(t)]_{max}=y_{st}\frac{1}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}$$

质点的最大动位移与静位移的比值称为动力系数，用 β 表示，则

$$\beta=\frac{[y(t)]_{max}}{y_{st}}=\frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}} \tag{12-27}$$

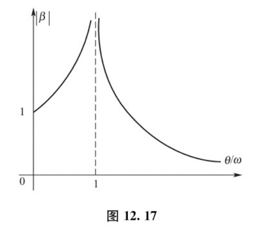


图 12.17

动力系数 β 与频率比值 $\frac{\theta}{\omega}$ 有关，如图 12.17 所示。

由式(12－27)可以看出，β 随 $\frac{\theta}{\omega}$ 变化的特点如下。

(1) $\frac{\theta}{\omega}\ll1\left(\frac{\theta}{\omega}\to0\right)$时，$\beta\to1$。

这时简谐荷载的数值变化很缓慢，动力作用不明显，接近于静力作用，可当作静荷载处理。

(2) $0<\frac{\theta}{\omega}<1$ 时，β 随 $\frac{\theta}{\omega}$ 的增大而增大，$\beta>1$。

(3) $\frac{\theta}{\omega}\to 1$ 时，动力系数 $\beta\to\infty$，会产生共振。

(4) $\frac{\theta}{\omega}>1$ 时，动力系数的绝对值随 $\frac{\theta}{\omega}$ 的增大而减小。

当 $\frac{\theta}{\omega}\gg 1$ 时，$|\beta|\to 0$。

对于单自由度体系，若荷载作用在质点上，其作用线与质点的位移一致时，结构的动内力与动位移成比例，则动内力和动位移有相同的动力系数。最大动内力按与最大动位移相同方法进行计算。例如，结构的最大动弯矩：

$$M_d=\beta M_{st}^F \tag{12-28}$$

式中，M_{st}^F 为荷载幅值作为静荷载时所产生的弯矩。

【例 12-4】 如图 12.18 所示简支梁，惯性矩 $I=8.8\times10^{-5}\,m^4$，弹性模量 $E=210GPa$。在梁跨中间处有自重为 $Q=35kN$ 的电动机，电动机转动时离心力的竖向分量为 $F\sin\theta t$，且 $F=10kN$。若不计梁的自重和阻尼，求当电动机的速度为 $n=500r/min$ 时，梁的最大弯矩和最大挠度。

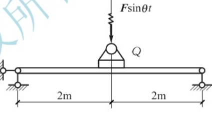


图 12.18

解：显然，最大弯矩和最大挠度发生在梁的中点，它们是在电机重力 Q 和动荷载 $F\sin\theta$ 共同作用下引起的。

(1) 计算电机重力作用下跨中弯矩和挠度。

$$M_Q=\frac{1}{4}Ql=\frac{1}{4}\times35\times4=35kN\cdot m$$

$$y_Q=Q\delta_{11}=Q\frac{l^3}{48EI}=\frac{35\times10^3\times4^3}{48\times210\times10^9\times8.8\times10^{-5}}=2.53\times10^{-3}m$$

(2) 计算动弯矩和动位移幅值。

将荷载幅值 F 作用在结构上，其跨中弯矩和位移为：

$$M_{st}^F=\frac{1}{4}Fl=\frac{1}{4}\times10\times4=10kN\cdot m$$

$$y_{st}^F=F\delta_{11}=\frac{10\times10^3\times4^3}{48\times210\times10^9\times8.8\times10^{-5}}=0.722\times10^{-3}m$$

结构的自振频率为：

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}=\sqrt{\frac{g}{mg\delta_{11}}}=\sqrt{\frac{g}{y_Q}}$$

$$=\sqrt{\frac{9.8}{2.53\times10^{-3}}}=62.3s^{-1}$$

动荷载的频率为：

$$\theta=\frac{2\pi n}{60}=\frac{2\times3.14\times500}{60}=52.3s^{-1}$$

由式(12-27)求得动力系数为：

$$\beta=\frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}=\frac{1}{1-\frac{52.3^2}{62.3^2}}=3.4$$

梁跨中截面动弯矩幅值和动位移幅值为：

$$M_d = \beta M_{st}^F = 10 \times 3.4 = 34\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$A = \beta y_{st}^F = 3.4 \times 0.772 \times 10^{-3} = 2.45 \times 10^{-3}\text{m}$$

（3）计算跨中截面的最大弯矩和最大位移。

$$M_{max} = M_Q + M_d = 35 + 34 = 69\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$y_{max} = y_Q + A = 2.53 \times 10^{-3} + 2.45 \times 10^{-3} = 4.98 \times 10^{-3}\text{m}$$

【例 12-5】 如图 12.19(a)所示刚架受简谐荷载作用。已知 $\theta = \sqrt{\frac{18EI}{ml^3}}$，横梁为刚性杆，柱抗弯刚度均为 EI，不计阻尼，求横梁水平位移幅值和动弯矩图。

解： 由图 12.19(b)可知 $\quad k_{11} = 3 \times \frac{12EI}{l^3} = \frac{36EI}{l^3}$

则自振频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{11}}{m}} = \sqrt{\frac{36EI}{ml^3}}$$

动力系数为：

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = 2$$

动弯矩幅值为：

$$M_d = \beta M_{st}^F = \beta F \overline{M}$$

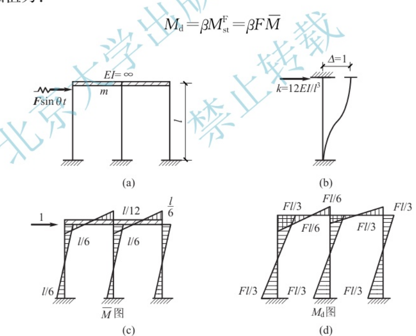


图 12.19

这里，$\overline{M}$图为结构在单位水平力作用下的弯矩图，如图 12.19(c)所示。由上式就可求得动弯矩幅值图［图 12.19(d)］。

荷载幅值 F 引起的位移为：

$$y_{st}^F = \frac{F}{k_{11}} = \frac{Fl^3}{36EI}$$

则横梁水平位移幅值为：

$$y_{\max}=\beta y_{st}^{F}=\frac{Fl^3}{18EI}$$

2. 阻尼对单自由度体系受迫振动的影响

在简谐荷载作用下有阻尼的单自由度体系的受迫振动的模型如图 12.20 所示。

在任一时刻，质量 m 的运动微分方程为：

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=P(t) \tag{12-29}$$

将 $P(t)=F\sin\theta t$ 代入式(12-29)得

$$\ddot{y}+2\xi\omega\dot{y}+\omega^2 y=\frac{F}{m}\sin\theta t \tag{12-30}$$

这里，$\xi=\frac{c}{2m\omega}$，$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

式(12-29)为二阶非齐次常微分方程，其解由齐次方程的通解和特解两部分组成。阻尼使齐次方程的通解部分趋于零，在振动的平稳阶段只剩下特解部分。

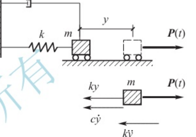


图 12.20

设特解为：

$$y(t)=a\sin(\theta t-\alpha) \tag{12-31}$$

将式(12-31)代入式(12-30)，经过计算可求得

$$a=\frac{F}{m\omega^2}\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}}=y_{st}\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}} \tag{12-32}$$

$$\alpha=-\tan^{-1}\frac{B}{A}=-\tan^{-1}\frac{-2\xi\omega\theta}{\omega^2-\theta^2}=\tan^{-1}\frac{2\xi\left(\frac{\theta}{\omega}\right)}{1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \tag{12-33}$$

由式(12-32)可得动力系数如下。

$$\beta=\frac{a}{y_{st}}=\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}} \tag{12-34}$$

(1) 由式(12-34)可知，动力系数 β 不仅与频率比 $\frac{\theta}{\omega}$ 有关，而且还与阻尼比 ξ 有关。

现将讨论阻尼对动力系数 β 的影响。对于不同的阻尼比 ξ，根据式(12-34)，可绘出 β 与 $\frac{\theta}{\omega}$ 的关系曲线，如图 12.21 所示。

① 在 $\frac{\theta}{\omega}$ 很小 $\left(即\frac{\theta}{\omega}\ll 1\right)$ 和 $\frac{\theta}{\omega}$ 很大 $\left(即\frac{\theta}{\omega}\gg 1\right)$ 时，ξ 对 β 的影响不大，可以不考虑 ξ 的影响。

$\frac{\theta}{\omega}\ll 1$ 时，可认为 $\beta\to 1$，$P(t)$ 可作为静力荷载处理。

$\frac{\theta}{\omega}\gg 1$ 时，可认为 $\beta\to 0$，可认为质点接近于没有振动位移。

② 在 $\frac{\theta}{\omega}\to 1$，即在 $\frac{\theta}{\omega}=1$ 附近，这时 ξ 对 β 的数值有很大的影响，由于阻尼的存在，

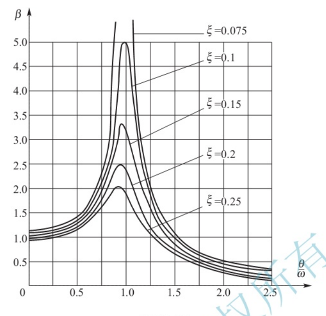


图 12.21

使 β 峰值下降。

在$\dfrac{\theta}{\omega}=1$时，即共振的情形，动力系数可由下式计算：

$$\beta_{\frac{\theta}{\omega}=1}=\frac{1}{2\xi} \tag{12-35}$$

如果忽略阻尼的影响，即在上式中令 $\xi\to 0$，则得出无阻尼体系共振时动力系数趋于无穷大的结论。如果考虑阻尼的影响，则式(12－35)中的 ξ 不为零，因此得出共振时动力系数是一个有限值的结论。

一般在 $0.75<\dfrac{\theta}{\omega}<1.3$(习惯上称此区域为共振区)的范围内，阻尼力大大减少受迫振动的位移，应考虑阻尼的影响。而在此范围以外，认为阻尼对 β 的影响很小，可按无阻尼的情形来计算。

(2) 阻尼比 ξ 对任一时刻的位移与动载 P 的相位差 α 的影响与频率比值$\dfrac{\theta}{\omega}$有关。

阻尼体系的位移比荷载 P 滞后一个相位角 α。

当 $0<\dfrac{\theta}{\omega}\leqslant 1$ 时，$0<\alpha<\pi/2$；当$\dfrac{\theta}{\omega}>1$ 时，$\pi/2<\alpha<\pi$。

① $\dfrac{\theta}{\omega}\to 0$(即$\dfrac{\theta}{\omega}\ll 1$)时，$y$ 与 P 同步。

此时体系振动很慢，惯性力、阻尼力都很小，动载和弹性力平衡，弹性力和 y 方向相反，所以动载和 y 同步。

② 当$\dfrac{\theta}{\omega}\to 1$(即 $\theta\approx\omega$)时，$\alpha\to 90^\circ$，y 与 P 相差接近 90°。

③ 当$\dfrac{\theta}{\omega}\to\infty$(即$\dfrac{\theta}{\omega}\gg 1$)时，$\alpha\to 180^\circ$，$y$ 与 P 方向相反。

此时体系振动很快，惯性很大、弹性力和相对比较小，动载主要与惯性力平衡。而惯性力与位移是同相位的，因此荷载与位移的相位角相等。

【例 12-6】 如图 12.22(a)所示梁承受简谐荷载 $F\sin\theta t$ 作用。已知：$F=30\text{kN}$，$\theta=80\text{s}^{-1}$，$m=300\text{kg}$，$EI=90\times10^5\text{N}\cdot\text{m}^3$，支座 B 的弹簧刚度 $K=\dfrac{48EI}{l^3}$。试求当阻尼比 $\xi=0.05$ 时，梁中点的位移幅值及最大动弯矩。

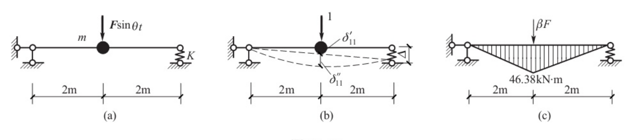


图 12.22

解：此梁运动为单自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动。

梁的柔度系数 $\delta_{11}=\delta'_{11}+\delta''_{11}$，如图 12.22(b)所示。

其中
$$\delta'_{11}=\frac{1}{2}\Delta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2K}=\frac{1}{192EI}$$

$$\delta''_{11}=\frac{l^3}{48EI}$$

$$\delta_{11}=\delta'_{11}+\delta''_{11}=\frac{5l^3}{192EI}$$

故自振频率为
$$\omega=\sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}=\sqrt{\frac{192\times90\times10^5}{300\times5\times4}}=134.16\text{s}^{-1}$$

动力系数为：
$$\beta=\sqrt{\frac{1}{(1-\frac{\theta^2}{\omega^2})^2+4\xi^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}}=\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}}=1.546$$

跨中位移幅值为：
$$A=\beta y_{\text{st}}^{\text{F}}=\beta F\delta_{11}=1.546\times30\times10^3\times\frac{5\times4^2}{192\times90\times10^5}=8.594\times10^{-3}\text{m}$$

由于动荷载作用在质点上，故位移动力系数与内力动力系数相同。

跨中最大弯矩为：
$$M_{\text{dmax}}=\beta\times\frac{Fl}{4}=1.546\times\frac{1}{4}\times30\times4=46.38\text{kN}\cdot\text{m}$$

动弯矩图如图 12.22(c)所示。

12.5 单自由度体系在任意荷载作用下的强迫振动

单自由度体系在任意荷载 $F(t)$ 作用下质点的运动方程为：
$$\ddot{y}+2\xi\omega\dot{y}+\omega^2y=\frac{F(t)}{m}$$

此方程为二阶线性非齐次微分方程。对于给定荷载 $F(t)$，通过解微分方程能够求出在

$F(t)$作用下的位移。为使计算更为简便和直观，这里将从冲量角度来讨论在任意荷载作用下的位移计算问题。

先来讨论瞬时冲量所引起的质点位移。瞬时冲量是指荷载 $F(t)$在极短的时间 Δt 内给予振动体系的冲量。若 $t=0$ 时，作用于质点的荷载大小为 F，作用时间为 Δt，则瞬时冲量为 $I=F\mathrm{d}t$，即为如图 12.23(a)所示的阴影面积。

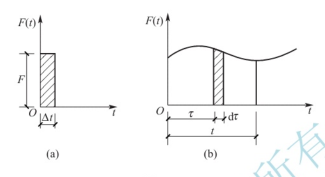


图 12.23

设静止的单自由度体系在 $t=0$ 时刻受冲量 I 的作用，则其作用的质点 m 获得的动量为 $m\dot{y}$。由于瞬时冲量 I 全部传给质点，故有 $I=m\dot{y}$，即

$$\dot{y}=\frac{I}{m}$$

当质点获得初速度$\dot{y}$后还未产生位移时，冲量即消失，因此质点在瞬时冲量作用后产生自由振动。由式(12－19)可知质点 m 的位移方程为：

$$y=\frac{I}{m\omega_{\mathrm{r}}}\mathrm{e}^{-\xi\omega t}\sin\omega_{\mathrm{r}}t \tag{12－36}$$

若瞬时冲量在 $t=\tau$ 时作用在质点上，则质点位移在 $t<\tau$ 时为零，在 $t>\tau$ 时有

$$y=\frac{I}{m\omega_{\mathrm{r}}}\mathrm{e}^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_{\mathrm{r}}(t-\tau) \tag{12－37}$$

对于图 12.23(b)所示一般荷载 $F(t)$可看成一系列瞬时冲量 $F(\tau)\mathrm{d}\tau$ 连续作用，即把每个瞬时冲量所引起的位移叠加，故可得到 $F(t)$作用下质点的位移为：

$$y=\frac{1}{m\omega_{\mathrm{r}}}\int_0^t F(\tau)\mathrm{e}^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_{\mathrm{r}}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{12－38}$$

这就是单自由度体系当原来的初位移和初速度均为零时，在任意动力荷载作用下的质点位移公式。

若不计阻尼，则有 $\xi=0$，$\omega_{\mathrm{r}}=\omega$，于是

$$y(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{12－39}$$

式(12－38)及式(12－39)称为杜哈梅(Duhamel)积分。

若在 $t=0$ 时，体系还具有初始位移 y_0 和初始速度 v_0，则质点的位移为：

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\xi\omega t}\left(y_0\cos\omega_{\mathrm{r}}t+\frac{v_0+\xi\omega y_0}{\omega_{\mathrm{r}}}\sin\omega_{\mathrm{r}}t\right)+\frac{1}{m\omega_{\mathrm{r}}}\int_0^t F(\tau)\mathrm{e}^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_{\mathrm{r}}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{12－40}$$

若不计阻尼，则有

$$y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+\frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{12－41}$$

有了式(12－38)～式(12－41)，只需把已知的干扰力 $F(\tau)$代入进行积分运算，便可求解此种干扰力作用下的受迫振动。下面研究两种特殊荷载作用下的解答。

(1) 突加荷载。

突加荷载是指突然施加于结构上，并保持数值不变且长期作用的荷载。设体系加载前处于静止状态，其随时间变化的规律为：

$$F(t)=\begin{cases}0 & 当\ t<0\\ F_0 & 当\ t\geqslant 0\end{cases} \qquad (12-42)$$

其函数曲线如图 12.24(a)所示。

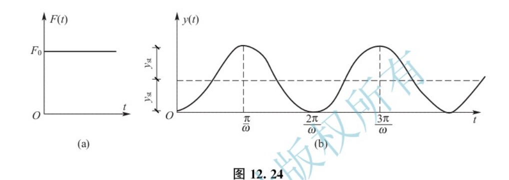


图 12.24

将式(12－41)中的荷载表达式代入式(12－38)，得到动位移：

$$y(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t F_0\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)=y_{st}(1-\cos\omega t) \qquad (12-43)$$

质点位移与时间关系曲线如图 12.24(b)所示。由此可知：突加荷载引起质点的最大动位移 $y_d=2y_{st}^{F}$，动力系数为 2。

(2) 线性渐增荷载。

在一定时间内($0\leqslant t\leqslant t_r$)，荷载由 0 增至 F_0，然后荷载值保持不变，如图 12.25 所示。

图 12.25

荷载表达式为：

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{F_0}{t_r}t & 当\ 0\leqslant t<t_r\\ F_0 & 当\ t\geqslant t_r\end{cases}$$

杜哈梅积分：

$$\left.\begin{aligned}y(t)&=\frac{F_0}{m\omega t_r}\int_0^t \tau\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau=y_{st}\frac{1}{t_r}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right) && 当\ t\leqslant t_r\\ y(t)&=\frac{F_0}{m\omega t_r}\int_0^t \tau\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{F_0}{m\omega}\int_0^t\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\ &=y_{st}\left\{1-\frac{1}{\omega t_r}[\sin\omega t-\sin\omega(t-t_r)]\right\} && 当\ t\geqslant t_r\end{aligned}\right\} \qquad (12-44)$$

对于这种线性渐增荷载，动力反应与升载时间 t_r的长短有关。图 12.26 所示曲线表示动力系数 β随升载时间比值$\frac{t_r}{T}$而变化的情况，这种关系曲线称为动力系数的反应谱曲线。

由图 12.26 看出，动力系数 β介于 1 与 2 之间。如果升载时间很短，例如 $t_r<\frac{T}{4}$，则动力系数 β接近 2，即相当于突加荷载的情况。如果升载时间很长，例如 $t_r>4T$，则动力

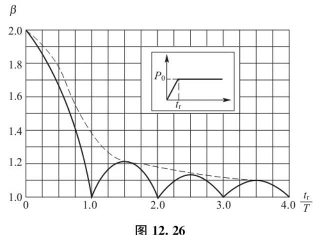


图 12.26

系数 β 接近 1，即相当于静荷载的情况。这里说的升载时间的长短，不仅是 t_r 的长短，而且是与周期 T 密切相关的。

【例 12－7】 爆炸荷载可近似用如图 12.27 所示规律表示，即

$$F(t)=\begin{cases}F\left(1-\dfrac{t}{t_1}\right) & (t\leqslant t_1)\\ 0 & (t\geqslant t_1)\end{cases}$$

图 12.27

若不考虑阻尼，试求单自由度结构在此荷载作用下的动位移分式。设体系原来处于静止状态。

解：（1）$t\leqslant t_1$ 时，结构的运动为初始条件均为零的强迫振动。

将 $F(t)$ 代入式(12－41)，得

$$y(t)=\frac{F}{m\omega}\int_0^t\left(1-\frac{\tau}{t_1}\right)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

将上式积分，得

$$y(t)=\frac{F}{m\omega^2}\left(1-\cos\omega t+\frac{1}{\omega t_1}\sin\omega t-\frac{t}{t_1}\right)$$

设 $y_{st}^F=\dfrac{F}{k_{11}}=\dfrac{F}{m\omega^2}$，则

$$y(t)=y_{st}^F\left(1-\cos\omega t+\frac{1}{\omega t_1}\sin\omega t-\frac{t}{t_1}\right)\tag{a}$$

（2）在 $t\geqslant t_1$ 时，结构的运动为初始条件为 $y_0=y(t_1)$，$\dot{y}_0=\dot{y}(t_1)$ 的自由振动。由式(a)求得：

$$y_0=y(t_1)=y_{st}^F\left(\frac{1}{\omega t_1}-\cos\omega t_1\right)$$

$$\dot{y}_0=\dot{y}(t_1)=y_{st}^F\omega\left(\sin\omega t_1-\frac{1}{\omega t_1}+\frac{1}{\omega t_1}\cos\omega t_1\right)$$

将 y_0、$\dot{y}_0$ 代入无阻尼自由振动位移式(12－7)，并将时间变量改为 $t-t_1$，即得 $t>t_1$ 时结构的位移，即

$$y=\frac{\dot{y}(t_1)}{\omega}\sin\omega(t-t_1)+y(t_1)\cos\omega(t-t_1)\quad(t\geqslant t_1)$$

$$y=y_{st}^F\left[-\cos\omega t+\frac{\sin\omega t-\sin\omega(t-t_1)}{\omega t_1}\right]$$

12.6 两个自由度体系的自由振动

在结构的动力分析中，为了保证分析结果的精度，有些结构需要简化为多自由度体系进行计算。多自由度体系自由振动分析的主要目的在于确定体系的自振频率和振型，为其强迫振动分析做准备。在单自由度体系的分析中，阻尼对体系自振频率等影响很小，对于多自由度体系也有类似情况，因此在其自由振动分析中不考虑阻尼的影响。两个自由度体系是多自由度体系的最简单情况，能清楚地反映多自由度体系的特征。

1. 两个自由度体系自由振动微分方程的建立

与单自由度体系一样，两个自由度体系建立振动方程也有两种方法：一种是柔度法，一种是刚度法。

1) 柔度法

设两个自由度体系如图 12.28(a)所示，集中质量分别为 m_1 和 m_2，不计梁的自重。在自由振动的任一时刻质量 m_1 和 m_2 的位移分别为 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$。

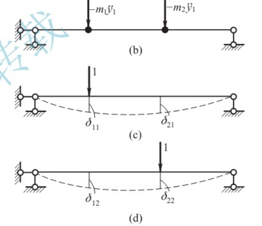


图 12.28

将惯性力 $-m_1\ddot{y}_1$ 和 $-m_2\ddot{y}_2$ 作为静荷载分别作用于质点 1、2 处［图 12.28(b)］。由于为自由振动，梁无动荷载作用。在各惯性力作用下，各质点的位移为：

$$\left.\begin{aligned} y_1(t)&=-m_1\ddot{y}_1(t)\delta_{11}-m_2\ddot{y}_2(t)\delta_{12} \\ y_2(t)&=-m_1\ddot{y}_1(t)\delta_{21}-m_2\ddot{y}_2(t)\delta_{22} \end{aligned}\right\} \tag{12-45}$$

式中，δ_{ij} 称为柔度系数，它表示沿 y_j 方向施加单位力时，在 y_i 方向所产生的位移［图 12.28(c)、(d)］。

2) 刚度法

列动力平衡方程时，可采取类似位移法的步骤来处理。首先在质点 1、2 处沿位移方向加入附加链杆［图 12.29(a)］，则在各惯性力 $-m_i\ddot{y}_i(i=1,2)$ 作用下，各链杆的反力等于 $m_i\ddot{y}_i(i=1,2)$。然后令各链杆发生与各质点实际情况相同的位移［图 12.29(b)］。此时，体系恢复原自然状态，则附加链杆的反力 $R_1(t)$、$R_2(t)$ 也等于零。由此可列出各质点的动力平衡方程，有

$$\left.\begin{aligned} R_1(t)&=K_{11}y_1+K_{12}y_2+R_{11}=0 \\ R_2(t)&=K_{21}y_1+K_{22}y_2+R_{21}=0 \end{aligned}\right\}$$

式中，各 K_{ij} 称为刚度系数，它表示由于链杆 j 发生单位位移(其余各链杆的位移为零)时

在链杆 i 处引起的反力。R_{1I}、R_{2I} 为在质点惯性力作用下各链杆反力［图 12.29(e)］。将 $R_{1I}(t)=m_1\ddot{y}_1(t)$，$R_{2I}(t)=m_2\ddot{y}_2(t)$代入上述方程，则运动方程为：

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{y}_1(t)+k_{11}y_1(t)+k_{12}y_2(t)=0\\
m_2\ddot{y}_2(t)+k_{21}y_1(t)+k_{22}y_2(t)=0
\end{aligned}
\tag{12-46}
$$

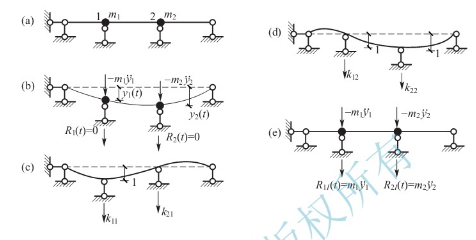


图 12.29

2. 频率方程和自振频率

1）用柔度系数表示频率方程和自振频率

在结构动力计算中，需要研究各质点按相同频率和相位角作简谐振动的自由振动解答。因此，设式(12－45)的解为简谐振动的解，即

$$
\left.\begin{aligned}
y_1(t)=A_1\sin(\omega t+\alpha)\\
y_2(t)=A_2\sin(\omega t+\alpha)
\end{aligned}\right\}
\tag{a}
$$

由式(a)可得两个质点的惯性力为：

$$
\left.\begin{aligned}
-m_1\ddot{y}_1(t)=m_1A_1\omega^2\sin(\omega t+\alpha)\\
-m_2\ddot{y}_2(t)=m_2A_2\omega^2\sin(\omega t+\alpha)
\end{aligned}\right\}
\tag{b}
$$

由式(b)可知两个质量的惯性力幅值分别为 $m_1A_1\omega^2$、$m_2A_2\omega^2$。

式中，A_1、A_2为质量 m_1、m_2的位移幅值；ω 为体系的自振圆频率；α 为相位角。

将式(a)代入运动方程(12－45)，并消去公因子 $\sin(\omega t+\alpha)$，得到位移振幅的方程组：

$$
\left.\begin{aligned}
A_1=(\omega^2m_1A_1)\delta_{11}+(\omega^2m_2A_2)\delta_{12}\\
A_2=(\omega^2m_1A_1)\delta_{21}+(\omega^2m_2A_2)\delta_{22}
\end{aligned}\right\}
\tag{12-47a}
$$

上式说明位移幅值是惯性力幅值作用下所产生的静力位移。

式(12－47a)还可写成：

$$
\left.\begin{aligned}
\left(\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2}\right)A_1+\delta_{12}m_2A_2=0\\
\delta_{21}m_1A_1+\left(\delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2}\right)A_2=0
\end{aligned}\right\}
\tag{12-47b}
$$

显然 $A_1=A_2=0$ 是方程组的解答，但它代表的是没有发生振动的静止状态。为了求得不全为零的解，令系数行列式等于零。

$$D=\begin{vmatrix}\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m_2\\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2}\end{vmatrix}=0 \tag{12-48a}$$

式(12-48a)称为频率方程，由它可求出 ω 如下。

令 $\lambda=\frac{1}{\omega^2}$，则有

$$\lambda^2-(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)\lambda+(\delta_{11}\delta_{22}m_1m_2-\delta_{12}\delta_{21}m_1m_2)=0 \tag{12-48b}$$

由此可解出 λ 的两个根：

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)\pm\sqrt{(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)^2-4(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})m_1m_2}\right] \tag{12-49}$$

这两个根都是正的实根，于是，可求得圆频率的两个值为：

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\quad \omega_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$$

较小的圆频率用 ω_1 表示，称为第一圆频率，另一个圆频率 ω_2 称为第二圆频率。

2) 用刚度系数表示频率方程和自振频率

仍设解的形式为：

$$\left.\begin{aligned}y_1(t)=A_1\sin(\omega t+\alpha)\\ y_2(t)=A_2\sin(\omega t+\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

将式(a)代入运动方程(12-46)，并消去公因子 $\sin(\omega t+\alpha)$，得到位移振幅的方程组：

$$\left.\begin{aligned}(k_{11}-\omega^2m_1)A_1+k_{12}A_2=0\\ k_{21}A_1+(k_{22}-\omega^2m_2)A_2=0\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

为了求得不全为零的解，令系数行列式等于零。

$$D=\begin{vmatrix}(k_{11}-\omega^2m_1) & k_{12}\\ k_{21} & (k_{22}-\omega^2m_2)\end{vmatrix}=0 \tag{12-50a}$$

式(12-50a)称为频率方程，由它可求出 ω 如下。

$$\omega^2=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{k_{11}}{m_1}+\frac{k_{22}}{m_2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{k_{11}}{m_1}+\frac{k_{22}}{m_2}\right)^2-\frac{4(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})}{m_1m_2}}\right] \tag{12-50b}$$

较小的圆频率用 ω_1 表示，称为第一圆频率，另一个圆频率 ω_2 称为第二圆频率。

3) 主振型及主振型的正交性

(1) 主振型。

由式(12-47b)可得到质点 1 和质点 2 位移振幅的比值：

$$\frac{A_1}{A_2}=-\frac{\delta_{12}m_2}{\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2}} \tag{12-51}$$

式(12-51)表明比值 $\frac{A_1}{A_2}$ 与频率 ω 有关，当频率 ω 确定后，比值 $\frac{A_1}{A_2}$ 是一个常数，称为主振型或振型。

与 ω_1 相应的振型，称为第一振型：

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=-\frac{\delta_{12}m_2}{\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega_1^2}} \tag{12-52a}$$

与 ω_2 相应的振型，称为第二振型：

$$\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=-\frac{\delta_{12}m_2}{\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega_2^2}} \tag{12-52b}$$

同理，可得到在刚度法中用刚度系数表示的两个主振型为：

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=-\frac{k_{12}}{k_{11}-\omega_1^2 m_1} \tag{12-53a}$$

$$\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=-\frac{k_{12}}{k_{11}-\omega_2^2 m_1} \tag{12-53b}$$

（2）主振型的正交性。

如图 12.30 所示，由功的互等定理：

$$(m_1\omega_1^2 A_1^{(1)})A_1^{(2)}+(m_2\omega_1^2 A_2^{(1)})A_2^{(2)}=(m_1\omega_2^2 A_1^{(2)})A_1^{(1)}+(m_2\omega_2^2 A_2^{(2)})A_2^{(1)}$$

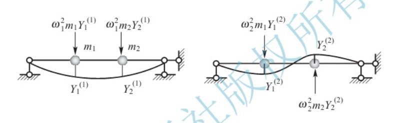


图 12.30

整理得：

$$(\omega_1^2-\omega_2^2)(m_1 A_1^{(1)}A_1^{(2)}+m_2 A_2^{(1)}A_2^{(2)})=0$$

因 $\omega_1\neq\omega_2$，则有：

$$m_1 A_1^{(1)}A_1^{(2)}+m_2 A_2^{(1)}A_2^{(2)}=0 \tag{12-54}$$

两个主振型相互正交，因与质量有关，又称为第一正交关系。

【例 12-8】 试求如图 12.31 (a)所示结构的自振频率、主振型，并验证主振型的正交性。已知：$m_1=m_2=m$，EI=常数。

解：（1）求自振频率。

由图 12.31(b)、(c)所示，用图乘法求出柔度系数为：

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{4l^3}{243EI},\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{7l^3}{486EI}$$

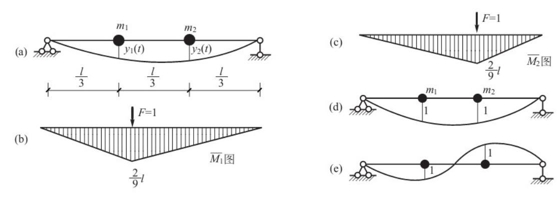


图 12.31

将柔度系数和质量代入式(12-49)，得

$$\lambda_1=\frac{15ml^3}{486EI},\quad \lambda_2=\frac{ml^3}{486}$$

则自振频率为：

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}=5.692\sqrt{\frac{EI}{ml^3}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}=22.045\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

(2) 求主振型。

当 $\omega=\omega_1$ 时，主振型为：

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=-\frac{\delta_{12}m_2}{\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega_1^2}}=\frac{1}{1}$$

当 $\omega=\omega_2$ 时，主振型为：

$$\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=-\frac{\delta_{12}m_2}{\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega_2^2}}=-\frac{1}{1}$$

两个主振型的形状如图 12.31(d)、(e)所示。

(3) 验证主振型的正交性。

$$m_1A_1^{(1)}A_1^{(2)}+m_2A_2^{(1)}A_2^{(2)}=m\times1\times1+m\times1\times(-1)=0$$

【例 12-9】 试求如图 12.32(a)所示刚架的自振频率和振型，并验证正交性。已知：横梁刚度 EI=∞；质量 $m_1=m_2=m$；层间侧移刚度为 $K_1=K_2=K$。

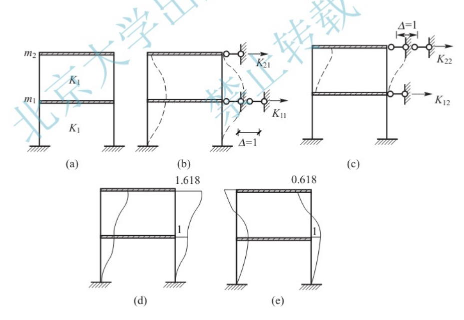


图 12.32

解：(1) 求刚架自振频率。

由图 12.32(b)、(c)可求刚架的刚度系数为：

$$K_{11}=K_1+K_2=2K,\quad K_{12}=K_{21}=-K,\quad K_{22}=K$$

将刚度系数和质量代入式(12-50b)，则有

$$(2K-\omega^2m)(K-\omega^2m)-K^2=0$$

解频率方程，则得

$$\omega_1^2=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\frac{K}{m}=0.38197\frac{K}{m}$$

$$\omega_2^2=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\frac{K}{m}=2.61803\frac{K}{m}$$

两个自振频率为：

$$\omega_1=0.618\sqrt{\frac{K}{m}}\omega_2=1.618\sqrt{\frac{K}{8}}$$

(2) 求振型。

当 $\omega=\omega_1$ 时，主振型为：

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=-\frac{k_{12}}{k_{11}-\omega_1^2 m_1}=-\frac{-K}{2K-0.382K}=\frac{1}{1.618}$$

当 $\omega=\omega_2$ 时，主振型为：

$$\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=-\frac{k_{12}}{k_{11}-\omega_2^2 m_1}=-\frac{-K}{2K-2.618K}=-\frac{1}{0.618}$$

两个主振型的形状如图 12.32(d)、(e)所示。

(3) 验证主振型的正交性。

$$m_1A_1^{(1)}A_1^{(2)}+m_2A_2^{(1)}A_2^{(2)}=m\times1\times1+m\times1.618\times(-0.618)=0$$

12.7 两个自由度体系在简谐荷载下的受迫振动

多自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动与单自由度体系类似，开始也存在一个过渡阶段，由于阻尼的影响其中自由振动部分很快会衰减掉，因此，对于多自由度体系的强迫振动只讨论平稳阶段的纯强迫振动。

1. 柔度法

1) 振动微分方程的建立

如图 12.33(a)所示两个自由度体系承受简谐荷载作用，且各荷载的频率和相位相同。

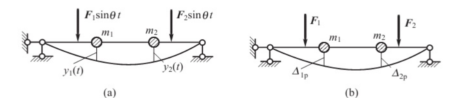


图 12.33

用柔度法建立运动方程，有

$$\left.\begin{aligned}y_1(t)&=\delta_{11}[-m_1\ddot{y}_1(t)]+\delta_{12}[-m_2\ddot{y}_2(t)]+\Delta_{1P}\sin\theta t\\y_2(t)&=\delta_{21}[-m_1\ddot{y}_1(t)]+\delta_{22}[-m_2\ddot{y}_2(t)]+\Delta_{2P}\sin\theta t\end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned}y_1(t)+\delta_{11}m_1\ddot{y}_1(t)+\delta_{12}m_2\ddot{y}_2(t)&=\Delta_{1P}\sin\theta t\\y_2(t)+\delta_{21}m_1\ddot{y}_1(t)+\delta_{22}m_2\ddot{y}_2(t)&=\Delta_{2P}\sin\theta t\end{aligned}\right\}\qquad(12-55)$$

式中，Δ_{1P}、Δ_{2P}为荷载幅值作为静荷载所引起的质点位移，如图 12.33(b)所示。

2）动位移的解答

由于在平稳阶段各质点与荷载同频同步振动，则设方程(12-55)强迫振动的解为：

$$\left.\begin{aligned} y_1(t)=A_1\sin\theta t \\ y_2(t)=A_2\sin\theta t \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

由此可得，质点的惯性力为：

$$\left.\begin{aligned} F_{I1}(t)=-m_1\ddot{y}_1(t)=m_1\theta^2A_1\sin\theta t \\ F_{I2}(t)=-m_2\ddot{y}_2(t)=m_2\theta^2A_2\sin\theta t \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

将式(a)和式(b)代入方程(12-55)，整理得位移幅值方程为：

$$\left.\begin{aligned} (m_1\theta^2\delta_{11}-1)A_1+m_2\theta^2\delta_{12}A_2+\Delta_{1P}=0 \\ m_1\theta^2\delta_{21}A_1+(m_2\theta^2\delta_{22}-1)A_2+\Delta_{2P}=0 \end{aligned}\right\} \tag{12-56}$$

解方程，可得位移幅值

$$A_1=\frac{D_1}{D_0},\ A_2=\frac{D_2}{D_0} \tag{12-57}$$

其中

$$D_0=\begin{vmatrix} (m_1\theta^2\delta_{11}-1) & m_2\theta^2\delta_{12} \\ m_1\theta^2\delta_{21} & (m_2\theta^2\delta_{22}-1) \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -\Delta_{1P} & m_2\theta^2\delta_{12} \\ -\Delta_{2P} & (m_2\theta^2\delta_{22}-1) \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} (m_1\theta^2\delta_{11}-1) & -\Delta_{1P} \\ m_1\theta^2\delta_{21} & -\Delta_{2P} \end{vmatrix} \tag{12-58}$$

由此得质点惯性力幅值 I_1 和 I_2 为：

$$I_1=m_1\theta^2A_1,\quad I_2=m_2\theta^2A_2 \tag{12-59}$$

由式(a)、式(b)和动荷载的表达式可知，在纯强迫振动时，质点的位移、惯性力及动荷载将同时达到最大值，因此，在计算最大动位移和动内力时，可将动荷载和惯性力的幅值作为静荷载作用于结构，用静力方法进行计算。

【例 12-10】 求如图 12.34(a)所示体系质点 1 和 2 的动位移幅值和动弯矩幅值图。已知：$m_1=m_2=m$，$\theta=0.6\omega_1$，$EI=$常数。

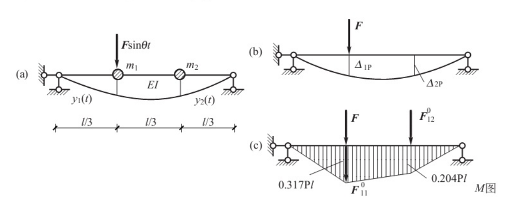


图 12.34

解：(1) 计算结构的柔度系数。

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{4l^3}{243EI}\qquad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{7l^3}{486EI}$$

（2）计算荷载幅值引起的位移［图 12.34(b)］。

$$\Delta_{1P}=\delta_{11}F=\frac{4Fl^3}{243EI}\quad \Delta_{2P}=\delta_{21}F=\frac{7Fl^3}{486EI}$$

（3）计算位移幅值 A_1 和 A_2。

将相关数值代入式(12－58)和式(12－57)中，求出质点的位移幅值。

$$A_1=2.55\times10^{-2}\frac{Fl^3}{EI},\quad A_2=2.31\times10^{-2}\frac{Fl^3}{EI}$$

（4）计算惯性力幅值 I_1 和 I_2。

$$I_1=m_1\theta^2A_1=\frac{11.65EI}{l^3}\times2.31\times10^{-2}\frac{Fl^3}{EI}=0.271F$$

$$I_2=m_1\theta^2A_2=\frac{11.65EI}{l^3}\times2.55\times10^{-2}\frac{Fl^3}{EI}=0.297F$$

（5）绘制动弯矩幅值图。

将惯性力幅值和荷载幅值作用于结构，用静力法求出弯矩图，如图 12.34(c)所示，这个弯矩图即为动弯矩幅值图。

2. 刚度法

1）振动微分方程的建立

图 12.35 所示为两个自由度体系，作用在质点 1、2 上的简谐荷载分别为 $P_1\sin\theta t$、$P_2\sin\theta t$。将质点作为隔离体，可写出两个自由度体系在简谐荷载作用下的动力平衡方程如下：

$$\left.\begin{aligned}m_1\ddot{y}_1+k_{11}y_1+k_{12}y_2=P_1\sin\theta t\\ m_2\ddot{y}_2+k_{21}y_1+k_{22}y_2=P_2\sin\theta t\end{aligned}\right\}\tag{12-60}$$

图 12.35

2）动位移的解答

由于在平稳阶段各质点与荷载同频同步振动，则设方程(12－57)强迫振动的解为：

$$\left.\begin{aligned}y_1(t)=A_1\sin\theta t\\ y_2(t)=A_2\sin\theta t\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

将式(a)代入式(12－59)，消去 $\sin\theta t$，可得

$$\left.\begin{aligned}(k_{11}-\theta^2m_1)Y_1+k_{12}Y_2=P_1\\ k_{21}Y_1+(k_{22}-\theta^2m_2)Y_2=P_2\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

由式(b)可解得位移幅值为：

$$A_1=\frac{D_1}{D_0},\quad A_2=\frac{D_2}{D_0}\tag{12-61}$$

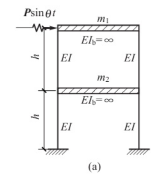
式中

$$D_0=\begin{vmatrix}(k_{11}-m_1\theta^2) & k_{12}\\ k_{21} & (k_{22}-m_2\theta^2)\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}P_1 & k_{12}\\ P_2 & (k_{22}-m_2\theta^2)\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}(k_{11}-m_1\theta^2) & P_1\\ k_{21} & P_2\end{vmatrix}\tag{12-62}$$

求得位移幅值 A_1、A_2后，仍可按式(12－59)计算惯性力 I_1、I_2。将 I_1、I_2连同荷载幅值 P 加在体系上，按静力计算方法可求得动内力幅值。

【例 12-11】 求如图 12.36(a)所示刚架在二层楼面有荷载 $P\sin\theta t$，$m_1=m_2=m$，$\theta=4\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$，计算第一、第二层楼面处侧移幅值、惯性力幅值及柱底端截面弯矩幅值。



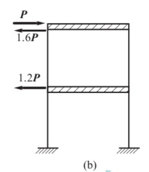


图 12.36

解：(1) 计算结构的刚度系数。

$$k_{11}=48\frac{EI}{h^3},\quad k_{12}=k_{21}=-24\frac{EI}{h^3},\quad k_{22}=24\frac{EI}{h^3}$$

(2) 计算 D_0、D_1、D_2。

$$m_1\theta^2=m_2\theta^2=m\left(4\sqrt{\frac{EI}{mh}}\right)^2=16\frac{EI}{h^3}$$

由式(12-62)，得

$$D_0=\begin{vmatrix}(k_{11}-m_1\theta^2) & k_{12}\\ k_{21} & (k_{22}-m_2\theta^2)\end{vmatrix}=-320\left(\frac{EI}{h^3}\right)^2$$

$$D_1=\begin{vmatrix}P_1 & k_{12}\\ P_2 & (k_{22}-m_2\theta^2)\end{vmatrix}=24P\frac{EI}{h^3},\ D_2=\begin{vmatrix}(k_{11}-m_1\theta^2) & P_1\\ k_{21} & P_2\end{vmatrix}=32P\frac{EI}{h^3}$$

(3) 计算 A_1、A_2。

由式(12-61)，得

$$A_1=\frac{D_1}{D_0}=-\frac{24}{320}P\frac{h^3}{EI}=-0.075P\frac{h^3}{EI}$$

$$A_2=\frac{D_2}{D_0}=-\frac{32}{320}P\frac{h^3}{EI}=-0.1P\frac{h^3}{EI}$$

(4) 计算 I_1、I_2。

由式(12-59)，得

$$I_1=m_1\theta^2A_1=16\frac{EI}{h^3}\times(-0.075)\frac{Ph^3}{EI}=-1.2P$$

$$I_2=m_2\theta^2A_2=16\frac{EI}{h^3}\times(-0.1)\frac{Ph^3}{EI}=-1.6P$$

(5) 计算内力。

刚架受力如图 12.36(b)所示，可用剪力分配法求解，也可用叠加公式求解。如柱底 A 截面的弯矩幅值为：

$$M_A=\overline{M}_1I_1+\overline{M}_2I_2+M_P=-1.2P\left(\frac{h}{4}\right)-1.6P\left(\frac{h}{4}\right)+\frac{Ph}{4}=-0.45Ph$$

12.8 多自由度体系的自由振动

多自由度体系的振动微分方程，同样可以采用两种方法建立：柔度法和刚度法，并采用矩阵形式表示。

1. 柔度法

1）振动微分方程的建立

如图 12.37(a)所示 n 个自由度体系，在自由振动的任一时刻 t，质量 m_i 的位移为 y_i，作用在该质量上的惯性力为 $I_i=-m_i\ddot{y}_i$，则有：

$$y_i=\delta_{i1}(-m_1\ddot{y}_1)+\delta_{i2}(-m_2\ddot{y}_2)+\cdots+\delta_{ii}(-m_i\ddot{y}_i)+\cdots+\delta_{ij}(-m_j\ddot{y}_j)+\cdots+\delta_{in}(-m_n\ddot{y}_n)$$

可建立 n 个上述类似的位移方程：

$$\left.\begin{aligned}y_1+m_1\ddot{y}_1\delta_{11}+m_2\ddot{y}_2\delta_{12}+\cdots+m_n\ddot{y}_n\delta_{1n}=0\\y_2+m_1\ddot{y}_1\delta_{21}+m_2\ddot{y}_2\delta_{22}+\cdots+m_n\ddot{y}_n\delta_{2n}=0\\\cdots\cdots\\y_n+m_1\ddot{y}_1\delta_{n1}+m_2\ddot{y}_2\delta_{n2}+\cdots+m_n\ddot{y}_n\delta_{nn}=0\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

这里 δ_{ij} 是结构的柔度系数，即单位力 $I_j=1$ 作用时质点 i 的位移［图 12.37(b)］。

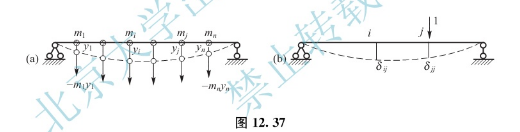


图 12.37

式(a)写成矩阵形式为：

$$\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\cdots&\delta_{1n}\\\delta_{21}&\delta_{22}&\cdots&\delta_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\delta_{n1}&\delta_{n2}&\cdots&\delta_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1&&&\\&m_2&&\\&&\ddots&\\&&&m_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\\ddot{y}_2\\\vdots\\\ddot{y}_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix}\tag{12-63a}$$

可简写为：

$$\{y\}+[\delta][M]\{\ddot{y}\}=\{0\}\tag{12-63b}$$

式中，$[\delta]$为结构的柔度矩阵，它为对称方阵；$[M]$为质量矩阵，在集中质量的体系中是对角阵；$\{y\}$为质点位移向量；$\{\ddot{y}\}$为质点加速度向量。

2）微分方程的解及基本频率

设解答的形式为：

$$\{y\}=\{A\}\sin(\omega t+\alpha) \tag{b}$$

式中，$\{A\}=\{A_1 A_2 \cdots A_n\}^{\mathrm{T}}$称为质点位移幅值向量。它是体系按某一频率$\omega$作简谐振动时，各质点的位移幅值依次排列的一个列向量。由于$\{A\}$不随时间而变化，体现了体系按频率ω作简谐振动时的振动形态，故称为主振型或简称振型。

将上式代入运动方程(12-63b)，并消去公因子$\sin(\omega t+\varphi)$，则得到

$$\left([\delta][M]-\frac{1}{\omega^2}[I]\right)\{A\}=0 \tag{12-64a}$$

式中，$[I]$为单位矩阵。

其展开式为：

$$\left.\begin{array}{l}\left(\delta_{11}m_1-\dfrac{1}{\omega^2}\right)A_1+\delta_{12}m_2A_2+\cdots+\delta_{1n}m_nA_n=0\\ \delta_{21}m_1A_1+\left(\delta_{22}m_2-\dfrac{1}{\omega^2}\right)A^2+\cdots+\delta_{2n}m_nA_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{n1}m_1A_1+\delta_{n2}m_2A_2+\cdots+\left(\delta_{nn}m_n-\dfrac{1}{\omega^2}\right)A_n=0\end{array}\right\} \tag{12-64b}$$

式(12-64)为位移幅值A_1，A_2，…，A_n的齐次方程。由于体系发生振动，A_1，A_2，…，A_n不全为零，则方程(12-64)有非零解的充分必要条件是其系数行列式为零，即

$$\left|[\delta][M]-\frac{1}{\omega^2}[I]\right|=0 \tag{12-65a}$$

其展开式为：

$$\begin{vmatrix}\left(\delta_{11}m_1-\dfrac{1}{\omega^2}\right) & \delta_{12}m_2\cdots\delta_{1n}m_n\\ \delta_{21}m_1 & \left(\delta_{22}m_2-\dfrac{1}{\omega^2}\right)\cdots\delta_{2n}m_n\\ \vdots & \vdots\\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2\cdots\left(\delta_{nn}m_n-\dfrac{1}{\omega^2}\right)\end{vmatrix}=0 \tag{12-65b}$$

式(12-65)即为n个自由度体系的频率方程。将行列式展开可以得到一个关于ω^2或$\dfrac{1}{\omega^2}$的n次代数方程。解此方程，可得到ω^2或$\dfrac{1}{\omega^2}$的n个非负实根，即得由小到大排列的n个自振频率ω_1，ω_2，…，ω_n。其中最小的频率ω_1称为第一频率或基本频率。

将求得的频率$\omega_K(K=1，2，\cdots，n)$分别代入振型方程(12-64a)，即

$$\left([\delta][M]-\frac{1}{\omega_K^2}[I]\right)\{A\}^{(K)}=\{0\} \tag{12-66}$$

由式(12-66)可确定与ω_K对应的主振型$\{A\}^{(K)}=\{A_1^{(K)}A_2^{(K)}\cdots A_n^{(K)}\}^{\mathrm{T}}$。由于振型方程的系数行列式为零，因而不能唯一确定$A_1^{(K)}$，$A_2^{(K)}$，…，$A_n^{(K)}$的值，但可确定它们之间的相对值，即确定了振型。要想主振型$\{A\}^{(K)}$中各元素的大小能够全部确定，还需要补充条件。常用的办法是：任取$\{A\}^{(K)}$中的一个元素(通常取第一个或最后一个元素)作为标准，取基值为1，根据振型方程可求出其余元素的数值。

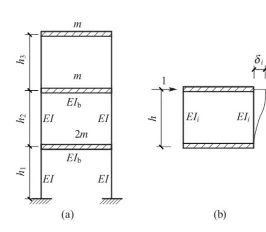


图 12.38

【例 12-12】 试求图 12.38 所示刚架的自振频率和主振型。横梁刚度 $EI_b=\infty$；刚架的质量都集中在楼层上，第一、二、三层楼板处的质量分别为 $2m$、m、m；层高相等，即 $h_1=h_2=h_3$；各柱刚度分别为：EI_1，$EI_2=\dfrac{EI_1}{3}$，$EI_3=\dfrac{EI_1}{5}$。

解：(1) 求自振频率。

刚架的层柔度系数 δ_i，即层间作用单位水平力时产生的层间位移［图 12.38(b)］，可求得

$$\delta_i=\frac{h_i^3}{24EI_i}$$

即 $\delta_1=\dfrac{h_1^3}{24EI_1}$，$\delta_2=\dfrac{h_2^3}{24EI_2}=3\delta_1$，$\delta_3=\dfrac{h_3^3}{24EI_3}=5\delta_1$

柔度矩阵

$$[\delta]=\begin{bmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}\\\delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}\\\delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}\end{bmatrix}=\delta_1\begin{bmatrix}1&1&1\\1&4&4\\1&4&9\end{bmatrix}$$

质量矩阵

$$[M]=m\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$|[\delta][M]-\lambda[I]|=\delta_1 m\begin{vmatrix}2-\xi&1&1\\2&4-\xi&4\\2&4&9-\xi\end{vmatrix}=0,\quad \xi=\frac{\lambda}{\delta_1 m}=\frac{1}{\delta_1 m\omega^2}$$

展开得：

$$\xi^3-15\xi^2+42\xi-30=0$$

解之得： $\xi_1=11.601$， $\xi_2=2.246$， $\xi_3=1.151$

三个频率为：

$$\omega_1=0.2936\sqrt{\frac{1}{m\delta_1}},\quad \omega_2=0.6673\sqrt{\frac{1}{m\delta_1}},\quad \omega_3=0.9319\sqrt{\frac{1}{m\delta_1}}$$

(2) 求主振型。

主振型 $\{A\}^{(K)}$ 由式(12-66)来求。另有 $A_3^{(K)}=1$。

首先求第一主振型。将 λ_1 和 ξ_1 代入下式：

$$[\delta][M]-\lambda[I]=\delta_1 m\begin{bmatrix}2-\xi&1&1\\2&4-\xi&4\\2&4&9-\xi\end{bmatrix}=\delta_1 m\begin{bmatrix}-9.601&1&1\\2&-7.601&4\\2&4&-2.601\end{bmatrix}$$

取 $A_3^{(1)}=1$，则

$$\left.\begin{aligned}-9.60A_1^{(1)}+A_2^{(1)}+1=0\\2A_1^{(1)}-7.60A_2^{(1)}+4=0\end{aligned}\right\}$$

$$\{A\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}0.163\\0.569\\1\end{Bmatrix}$$

同理可求得第二、第三主振型。

2. 刚度法

1) 振动微分方程的建立

如图12.39(a)所示为 n 个自由度体系，设在振动的任一时刻各质点的位移分别为 y_1，y_2，…，y_n。首先加入附加链杆阻止所有质点的位移，则在各质点的惯性力 $-m_i\ddot{y}_i(i=1，2，\cdots，n)$ 作用下，各链杆的反力即等于 $m_i\ddot{y}_i$[图12.39(b)]；其次令各链杆发生与各质点实际位置相同的位移［图12.39(c)］，此时各链杆上所需施加的力为 F_{Ri}。若不考虑各质点所受的阻尼力，则将上述两情况叠加，各附加链杆上的总反力应等于零，由此便可列出各质点的动力平衡方程。以质点 m_i 为例，有

$$m_i\ddot{y}_i+F_{Ri}=0 \quad (a)$$

由叠加原理

$$F_{Ri}=k_{i1}y_1+k_{i2}y_2+\cdots+k_{in}y_n \quad (b)$$

式中，k_{ii}、k_{ij} 等为结构的刚度系数，它们的物理意义如图12.39(d)、(e)所示。把式(b)代入式(a)，有

图 12.39

$$m_i\ddot{y}_i+k_{i1}y_1+k_{i2}y_2+\cdots+k_{in}y_n=0$$

同理，对每个质点都列出这样一个动力平衡方程，于是可建立 n 个方程如下：

$$\left.\begin{aligned}m_1\ddot{y}_1+k_{11}y_1+k_{12}y_2+\cdots+k_{1n}y_n=0\\m_2\ddot{y}_2+k_{21}y_1+k_{22}y_2+\cdots+k_{2n}y_n=0\\\cdots\cdots\\m_n\ddot{y}_n+k_{n1}y_1+k_{n2}y_2+\cdots+k_{nn}y_n=0\end{aligned}\right\}$$

n 个质点的振动的微分方程可用矩阵形式表示：

$$\begin{bmatrix}m_1&&&\\&m_2&&\\&&\ddots&\\&&&m_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\\ddot{y}_2\\\vdots\\\ddot{y}_n\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix} \quad (12-67a)$$

简写为：

$$[M][\ddot{y}]+[K]\{y\}=\{0\} \quad (12-67b)$$

式中，$[K]$为结构的刚度矩阵，它为对称方阵；$[M]$为质量矩阵，在集中质量的体系

中是对角阵；$\{y\}$为质点位移向量；$\{\ddot{y}\}$为质点加速度向量。

2）微分方程的解及基本频率

设解答的形式为：

$$\{y\}=\{A\}\sin(\omega t+\alpha) \tag{c}$$

将式(c)代入运动方程(12-65b)，并消去公因子 $\sin(\omega t+\varphi)$，则得到

$$([K]-\omega^2[M])\{A\}=\{0\} \tag{12-68}$$

为了得到$\{A\}$的非零解，应使系数行列式为零，即

$$|[K]-\omega^2[M]|=0$$

将行列式展开，可求出 n 个自振频率 ω_1，ω_2，…，ω_n。其中最小的频率 ω_1 称为第一频率或基本频率。

令$\{A\}^{(i)}$表示为与频率 ω_i 相应的主振型，将之代入式(12-68)，得

$$([K]-\omega_i{}^2[M])\{A\}^{(i)}=\{0\} \tag{12-69}$$

由此可求出 n 个主振型向量$\{A\}^{(1)}$、$\{A\}^{(2)}$、…、$\{A\}^{(n)}$。

【例 12-13】 试用刚度法重做例 12-12。

解：(1) 求自振频率。

即 $k_1=\dfrac{24EI_1}{h_1^3}$，$k_2=\dfrac{24EI_2}{h_2^3}=\dfrac{k_1}{3}$，$k_3=\dfrac{24EI_3}{h_3^3}=\dfrac{k_1}{5}$

刚度矩阵和质量矩阵分别为：

$$[K]=\frac{k}{15}\begin{bmatrix}20 & -5 & 0\\ -5 & 8 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\qquad [M]=m\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此

$$[K]-\omega^2[M]=\frac{k_1}{15}\begin{bmatrix}20-2\eta & -5 & 0\\ -5 & 8-\eta & -3\\ 0 & -3 & 3-\eta\end{bmatrix} \tag{a}$$

其中 $\eta=\dfrac{15m}{k_1}\omega^2$

$$\frac{k_1}{15}\begin{vmatrix}20-2\eta & -5 & 0\\ -5 & 8-\eta & -3\\ 0 & -3 & 3-\eta\end{vmatrix}=0$$

展开得：

$$2\eta^3-42\eta^2+225\eta-225=0$$

方程的三个根为：

$$\eta_1=1.293,\quad \eta_2=6.680,\quad \eta_3=13.027$$

$$\omega_1^2=0.0862\,\frac{k}{m},\quad \omega_2^2=0.4453\,\frac{k}{m},\quad \omega_3^2=0.8685\,\frac{k}{m}$$

$$\omega_1=0.2936\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_2=0.6673\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_3=0.9319\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(2) 求主振型。

第一主振型。将 ω_1 和 η_1 代入式(a)，得

$$[K]-\omega_1{}^2[M]=\frac{k_1}{15}\begin{bmatrix}17.414 & -5 & 0\\ -5 & 6.707 & -3\\ 0 & -3 & 1.707\end{bmatrix}$$

保留后两个方程，得

$$\left.\begin{array}{l}-5A_1^{(1)}+6.707A_2^{(1)}-3A_3^{(1)}=0\\ -3A_2^{(1)}+1.707A_3^{(1)}=0\end{array}\right\}$$

取 $A_3^{(1)}=1$，可解得

$$\{A\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{Bmatrix}^{(1)}=\begin{Bmatrix}0.163\\ 0.569\\ 1\end{Bmatrix}$$

振型图如图 12.40(a)所示。

第二主振型。将 ω_2 和 η_2 代入式(a)，得

$$[K]-\omega_2{}^2[M]=\frac{k_1}{15}\begin{bmatrix}6.640 & -5 & 0\\ -5 & 1.320 & -3\\ 0 & -3 & -3.680\end{bmatrix}$$

保留后两个方程，得

$$\left.\begin{array}{l}-5A_1^{(2)}+1.320A_2^{(2)}-3A_3^{(2)}=0\\ -3A_2^{(2)}-3.680A_3^{(2)}=0\end{array}\right\}$$

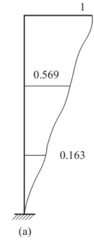
取 $A_3^{(2)}=1$，可解得

$$\{A\}^{(2)}=\begin{Bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{Bmatrix}^{(2)}=\begin{Bmatrix}-0.294\\ -1.227\\ 1\end{Bmatrix}$$

振型图如图 12.40(b)所示。

第三主振型。将 ω_3 和 η_3 代入式(a)，得

$$[K]-\omega_3{}^2[M]=\frac{k_1}{15}\begin{bmatrix}-6.054 & -5 & 0\\ -5 & -5.027 & -3\\ 0 & -3 & -10.027\end{bmatrix}$$



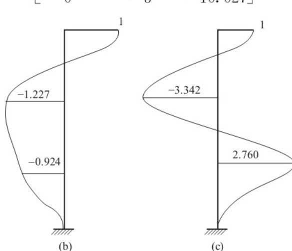


图 12.40

保留后两个方程，得

$$\left.\begin{aligned}5A_1^{(3)}+5.027A_2^{(3)}+3A_3^{(3)}=0\\3A_2^{(3)}+10.027A_3^{(3)}=0\end{aligned}\right\}$$

取 $A_3^{(3)}=1$，可解得：$\{A\}^{(3)}=\begin{Bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{Bmatrix}^{(3)}=\begin{Bmatrix}2.760\\-3.3427\\1\end{Bmatrix}$

振型图如图 12.40(c)所示。

3. 主振型的正交性

由上面的分析可知，n 个自由度体系具有 n 个自振频率及相应的 n 个主振型，从 n 个振型中任取两个振型 $\{A\}^{(i)}$ 和 $\{A\}^{(j)}$，若使

$$\{A\}^{\mathrm{T}(i)}[M]\{A\}^{(j)}=0 \tag{12-70}$$

$$\{A\}^{\mathrm{T}(i)}[K]\{A\}^{(j)}=0 \tag{12-71}$$

则称为主振型满足正交性，即对质量矩阵正交，对刚度矩阵也正交。

事实上，将主振型 $\{A\}^{(i)}$ 代入振型方程(12-69)，有

$$([K]-\omega_i^2[M])\{A\}^{(i)}=0$$

或

$$[K]\{A\}^{(i)}=\omega_i^2[M]\{A\}^{(i)}$$

上式两边左乘 $\{A\}_{(j)}^{\mathrm{T}}$，有

$$\{A\}_{(j)}^{\mathrm{T}}[K]\{A\}^{(i)}=\omega_i^2\{A\}_{(j)}^{\mathrm{T}}\{M\}\{A\}^{(i)} \tag{a}$$

将主振型 $\{A\}^{(j)}$ 代入振型方程同样可得

$$\{A\}_{(i)}^{\mathrm{T}}[K]\{A\}^{(j)}=\omega_j^2\{A\}_{(i)}^{\mathrm{T}}\{M\}\{A\}^{(j)}$$

将上式两边同时转置，这里 [K] 和 [M] 为对称矩阵，即 $[K]^{\mathrm{T}}=[K]$，$[M]^{\mathrm{T}}=[M]$，则有

$$\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[K]\{A\}^{(i)}=\omega_j^2\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[M]\{A\}^{(i)} \tag{b}$$

式(a)减去式(b)，有

$$(\omega_i^2-\omega_j^2)\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[M]\{A\}^{(i)}=0$$

由 $\omega_i\neq\omega_j$，则有

$$\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[M]\{A\}^{(i)}=0 \tag{c}$$

将式(c)代入式(a)，有

$$\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[K]\{A\}^{(i)}=0$$

上面证明了主振型具有正交性，它是体系本身固有的性质。利用主振型的正交性不仅可简化动荷载作用下强迫振动的计算，而且可以检验所求得的主振型是否正确。

【例 12-14】 验算例 12-13 中所求得的主振型是否满足正交关系。

解： 由例 12-13 得知刚度矩阵和质量矩阵分别为：

$$[K]=\frac{k}{15}\begin{bmatrix}20&-5&0\\-5&8&-3\\0&-3&3\end{bmatrix}\quad[M]=m\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

三个主振型分别为：

$$\{A\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}0.163\\0.569\\1\end{Bmatrix},\quad \{A\}^{(2)}=\begin{Bmatrix}-0.294\\-1.227\\1\end{Bmatrix},\quad \{A\}^{(3)}=\begin{Bmatrix}2.760\\-3.3427\\1\end{Bmatrix}$$

（1）验算正交关系式(12－70)。

$$\{A\}^{\mathrm{T}(1)}[M]\{A\}^{(2)}=[0.163\quad 0.569\quad 1]\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0.924\\-1.227\\1\end{Bmatrix}m$$

$$=m[0.163\times2\times(-0.924)+0.569\times2\times(-1.227)+1\times1\times1]$$

$$=0.0006m\approx0$$

$$\{A\}^{(1)\mathrm{T}}[M]\{A\}^{(3)}=-0.002m\approx0$$

$$\{A\}^{(2)\mathrm{T}}[M]\{A\}^{(3)}=-0.0002m\approx0$$

（2）验算正交关系式(12－71)。

$$\{A\}^{(1)\mathrm{T}}[K]\{A\}^{(2)}=[0.163\quad 0.569\quad 1]\frac{k_1}{15}\begin{bmatrix}20&-5&0\\-5&8&-3\\0&-3&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0.924\\-1.227\\1\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{k_1}{15}\times(6.681-6.676)=\frac{k_1}{15}\times0.005\approx0$$

$$\{A\}^{\mathrm{T}(1)}[K]\{A\}^{(3)}=\frac{k_1}{15}\times(24.75-24.77)=\frac{k_1}{15}\times(-0.02)\approx0$$

$$\{A\}^{\mathrm{T}(2)}[K]\{A\}^{(3)}=\frac{k_1}{15}\times(34.0720-34.0722)=\frac{k_1}{15}\times(-0.0002)\approx0$$

12.9 振型分解法

本节用振型分解法讨论多自由度体系在任意动荷载作用下的受迫振动。

对于 n 个自由度体系，当动荷载均作用在质点上时，用刚度法建立的无阻尼强迫振动方程为：

$$\left.\begin{array}{l}m_1\ddot{y}_1+K_{11}y_1+K_{12}y_2+\cdots+K_{1n}y_n=F_1(t)\\ m_2\ddot{y}_2+K_{21}y_1+K_{22}y_2+\cdots+K_{2n}y_n=F_2(t)\\ \quad\cdots\cdots\\ m_{\mathrm{n}}\ddot{y}_n+K_{n1}y_1+K_{n2}y_2+\cdots+K_{nn}y_n=F_n(t)\end{array}\right\}\tag{12-72a}$$

用矩阵表示为：

$$[M]\{\ddot{y}\}+[K]\{y\}=\{F(t)\}\tag{12-72b}$$

式中，$[M]$ 为质量矩阵；$[K]$ 为刚度矩阵；$[\ddot{y}]$ 为加速度向量；$[y]$为位移向量；$\{F(t)\}$ 为荷载向量。

由于刚度矩阵 $[K]$ 一般不是对角矩阵，则方程(12－72)中每一个方程都包含一个以上的未知质点的位移，即这些方程是互相耦联的。当动力荷载 $F(t)$不是按简谐规律变化而是任意动荷载时，直接求解联立的微分方程组是很困难的。本节将利用主振型的正交

性，通过一定的坐标变换可将联合的(耦联的)微分方程组化成 n 个非耦联的微分方程，从而使每一个方程只含有一个未知量，即可分别独立求解。这种方法称为振型分解法。

前面建立的多自由度体系的运动方程均以各质点位移作为基本未知量，质点位移向量

$$\{y\}=[y_1 y_2 \cdots y_n]^{\mathrm{T}}$$

称为几何坐标。

为了坐标变换的需要，取结构已规准化的 n 个主振型向量 $\{A\}^{(1)}$，$\{A\}^{(2)}$，…，$\{A\}^{(n)}$ 作为基底，将几何坐标 $\{y\}$ 表示为该基底的线性组合，即

$$\begin{aligned}\{y\}&=\eta_1\{A\}^{(1)}+\eta_2\{A\}^{(2)}+\cdots+\eta_n\{A\}^{(n)}\\&=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\{A\}^{(i)}\end{aligned}\tag{12-73}$$

这也就是将位移向量 $\{y\}$ 按各主振型进行分解。上式的展开形式为：

$$\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{Bmatrix}=\eta_1\begin{Bmatrix}A_1^{(1)}\\A_2^{(1)}\\\vdots\\A_n^{(1)}\end{Bmatrix}+\eta_2\begin{Bmatrix}A_1^{(2)}\\A_2^{(2)}\\\vdots\\A_n^{(2)}\end{Bmatrix}+\cdots+\eta_n\begin{Bmatrix}A_1^{(n)}\\A_2^{(n)}\\\vdots\\A_n^{(n)}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_1^{(1)}&A_1^{(2)}&\cdots&A_1^{(n)}\\A_2^{(1)}&A_2^{(2)}&\cdots&A_2^{(n)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_n^{(1)}&A_n^{(2)}&\cdots&A_n^{(n)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{Bmatrix}$$

可简写为：

$$\{y\}=[A]\{\eta\}$$

式中，$\{\eta\}=[\eta_1\eta_2\quad\cdots\quad\eta_n]^{\mathrm{T}}$ 称为正则坐标。$[A]$ 称为主振型矩阵，它就是几何坐标和正则坐标之间的转换矩阵。由于 $\{A\}^{(i)}$ 与时间无关，而 η_i 是时间 t 的函数。

将式(12-73)代入运动方程(12-72)，得到关于正则坐标的微分方程：

$$[M]\left(\sum_{i=1}^{n}\ddot{\eta}_i\{A\}^{(i)}\right)+[K]\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i\{A\}^{(i)}\right)=\{F(t)\}$$

两边左乘 $\{A\}^{\mathrm{T}(j)}$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[M]\{A\}^{(i)}\ddot{\eta}_i+\sum_{i=1}^{n}\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[K]\{A\}^{(i)}\eta_i=\{A\}^{\mathrm{T}(j)}\{F(t)\}\tag{12-74}$$

由振型的正交性，有

$$\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[M]\{A\}^{(i)}=0\quad(i\neq j)$$
$$\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[K]\{A\}^{(i)}=0\quad(i\neq j)$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[M]\{A\}^{(i)}=\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[M]\{A\}^{(j)}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[K]\{A\}^{(i)}=\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[K]\{A\}^{(j)}$$

于是式(12-74)成为：

$$\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[M]\{A\}^{(j)}\ddot{\eta}_j+\{A\}^{\mathrm{T}(j)}[K]\{A\}^{(j)}\eta_j=\{A\}^{\mathrm{T}(j)}\{F(t)\}\tag{12-75}$$

令

$$\{A\}^{T(j)}[M]\{A\}^{(j)}=M_j^*$$
$$\{A\}^{T(j)}[K]\{A\}^{(j)}=K_j^* \qquad (12-76)$$
$$\{A\}^{T(j)}\{F(t)\}=F_j^*(t)$$

则式(12－75)改写为：

$$A_j^*\ddot{\eta}_j+K_j^*\eta_j=F_j^*(t) \qquad (12-77)$$

式中，M_j^* 为第 j 个主振型的广义质量；K_j^* 这第 j 个主振型的广义刚度；$F_j^*(t)$为广义荷载。

多自由度体系的振型方程(12－68)

$$([K]-\omega_j^2[M])\{A\}=\{0\}$$

式(12－68)两边左乘$\{A\}^{T(j)}$，得

$$\{A\}^{T(j)}[K]\{A\}^{(j)}-\omega_j^2\{A\}^{T(j)}[M]\{A\}^{(j)}=0$$

则有

$$\omega_j^2=\frac{K_j^*}{M_j^*}$$

于是，式(12－75)可写为：

$$\ddot{\eta}_j+\omega_j^2\eta_j=\frac{1}{M_j^*}F_j^*(t) \qquad (12-78)$$

令以上过程中 j 从 1 到 n，则可得到 n 个独立方程：

$$\ddot{\eta}_j+\omega_j^2\eta_j=\frac{1}{M_j^*}F_j^*(t) \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (12-79)$$

这就是关于正则坐标 η_j 的运动方程，与无阻尼单自由度体系强迫振动方程形式相同，因而可采用同样方法求解。在分别求出各正则坐标 η_1，η_2，…，η_n之后，可由式(12－73)求得各几何坐标 y_1，y_2，…，y_n。

综上所述，振型分解法的计算步骤为：

(1) 计算结构的自振频率和振型；

(2) 由式(12－76)计算各振型的广义质量和广义荷载；

(3) 求解正则坐标的微分方程(12－79)，得到正则坐标；

(4) 按式(12－73)计算结构质点位移(几何坐标)。

【例 12－15】 试用振型分解法求图 12.41(a)所示各横梁处的位移幅值和柱端弯矩幅值。已知刚架各横梁刚度为无穷大，$m=100\text{t}$，$EI=5\times10^5\text{kN}\cdot\text{m}^2$，$l=5\text{m}$，简谐荷载幅值 $F=30\text{kN}$，其每分钟振动 240 次。

解：(1)求体系的自振频率和振型。

在各横梁水平方向设置附加链杆，并令 3 根附加链杆分别产生单位水平位移，如图 12.41(b)、(c)、(d)所示。根据截面平衡条件，求出各附加链杆的反力。

令

$$K=\frac{24EI}{l^3}=\frac{24\times5\times10^5}{5^3}=96\times10^3\text{kN}$$

则

$$K_{11}=6K \quad K_{22}=3K \quad K_{33}=K$$

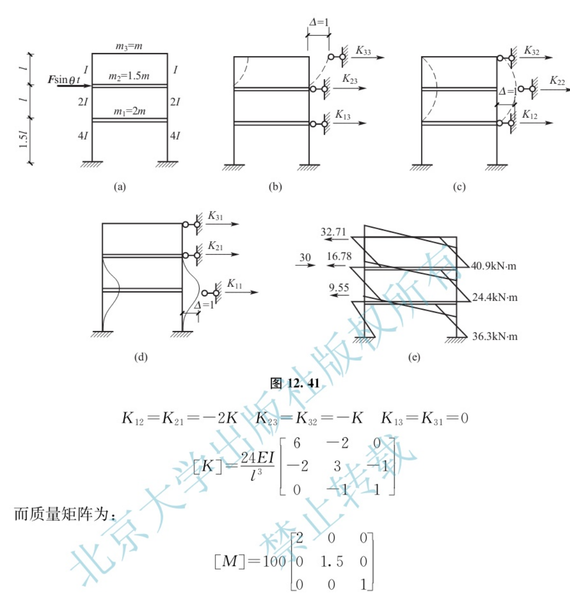


图 12.41

$$K_{12}=K_{21}=-2K \quad K_{23}=K_{32}=-K \quad K_{13}=K_{31}=0$$

$$[K]=\frac{24EI}{l^3}\begin{bmatrix}6 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

而质量矩阵为：

$$[M]=100\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

将刚架的刚度矩阵 $[K]$ 和质量矩阵 $[M]$ 代入频率方程 $|[K]-\omega^2[M]|=0$，求得结构自振频率为：

$$\omega_1=19.40\text{s}^{-1},\quad \omega_2=42.27\text{s}^{-1},\quad \omega_3=60.67\text{s}^{-1}$$

再利用幅值方程 $([K]-\omega^2[M])\{A\}=\{0\}$，求得结构振型为：

$$\{A\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}1\\ 2.608\\ 4.290\end{Bmatrix}\quad \{A\}^{(2)}=\begin{Bmatrix}1\\ 1.226\\ -1.584\end{Bmatrix}\quad \{A\}^{(3)}=\begin{Bmatrix}1\\ -0.834\\ 0.294\end{Bmatrix}$$

(2) 计算广义质量和广义荷载。

$$M_1^*=\{A\}^{\mathrm{T}(1)}[M]\{A\}^{(1)}=[1 \quad 2.608 \quad 4.290]\begin{bmatrix}2\text{m} & 0 & 0\\ 0 & 1.5\text{m} & 0\\ 0 & 0 & \text{m}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 2.608\\ 4.290\end{Bmatrix}=30.607\text{m}$$

$$M_2^*=\{A\}^{\mathrm{T}(2)}[M]\{A\}^{(2)}=[1 \quad 1.226 \quad -1.584]\begin{bmatrix}2\text{m} & 0 & 0\\ 0 & 1.5\text{m} & 0\\ 0 & 0 & \text{m}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 1.226\\ -1.584\end{Bmatrix}=6.7637\text{m}$$

$$M_3^* = \{A\}^{T(3)}[M]\{A\}^{(3)} = [1 \quad -0.834 \quad 0.294]\begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.834 \\ 0.294 \end{Bmatrix} = 3.1298m$$

$$F_1^*(t) = \{A\}^{T(1)}\{F(t)\} = [1 \quad 2.608 \quad 4.290]\begin{Bmatrix} 0 \\ F\sin\theta t \\ 0 \end{Bmatrix} = 2.608F\sin\theta t$$

$$F_2^*(t) = \{A\}^{T(2)}\{F(t)\} = [1 \quad 1.226 \quad -1.584]\begin{Bmatrix} 0 \\ F\sin\theta t \\ 0 \end{Bmatrix} = 1.226F\sin\theta t$$

$$F_3^*(t) = \{A\}^{T(3)}\{F(t)\} = [1 \quad -0.834 \quad 0.294]\begin{Bmatrix} 0 \\ F\sin\theta t \\ 0 \end{Bmatrix} = -0.834F\sin\theta t$$

(3) 求正则坐标的运动方程。

正则坐标的运动方程为：

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{F_i^*(t)}{M_i^*} \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

由于 $F_i^*(t)$为简谐荷载，上述方程为 3 个独立的单自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动方程。由式(12-26)得

$$\eta_1 = \frac{F_1^*(t)}{M_1^*(\omega_1^2 - \theta^2)} = \frac{2.608F\sin\theta t}{30.607m(19.40^2 - 64\pi^2)} = -0.10013\times10^{-3}\sin\theta t$$

$$\eta_2 = \frac{F_2^*(t)}{M_2^*(\omega_2^2 - \theta^2)} = \frac{1.266F\sin\theta t}{6.763m(41.27^2 - 64\pi^2)} = -0.050747\times10^{-3}\sin\theta t$$

$$\eta_3 = \frac{F_3^*(t)}{M_3^*(\omega_3^2 - \theta^2)} = \frac{-0.834F\sin\theta t}{3.1298m(60.67^2 - 64\pi^2)} = -0.026217\times10^{-3}\sin\theta t$$

(4) 计算质点位移(几何坐标)。

$$\{y\} = \sum_{i=1}^{3}\{A\}^{(i)}\eta_i$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.608 \\ 4.290 \end{Bmatrix}\eta_1 + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.226 \\ -1.584 \end{Bmatrix}\eta_2 + \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.834 \\ 0.294 \end{Bmatrix}\eta_3 = \begin{Bmatrix} -0.0756 \\ -0.1771 \\ -0.5178 \end{Bmatrix}\times10^{-3}\sin\theta t$$

各质点最大动位移为：

$$A_1 = -0.0756\times10^{-3}\text{m} \quad A_2 = -0.1771\times10^{-3}\text{m} \quad A_3 = -0.5178\times10^{-3}\text{m}$$

(5) 计算结构最大动弯矩。

惯性力幅值为$\{F_I^0\} = \theta^2[m]\{A\}$，即

$$\begin{Bmatrix} F_{I1}^0 \\ F_{I2}^0 \\ F_{I3}^0 \end{Bmatrix} = 64\pi^2\begin{bmatrix} 200 & & \\ & 150 & \\ & & 100 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.0756\times10^3 \\ -0.1771\times10^3 \\ -0.5178\times10^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9.55 \\ -16.78 \\ -32.71 \end{Bmatrix}\text{kN}$$

将求得的惯性力幅值和简谐荷载幅值直接作用于刚架，如图 12.41(e)所示。

由于此刚架横梁刚度为无穷大，每层只有两根柱且其截面及柱高相等，故每根柱顶的弯矩为：

$$M_i=\frac{V_i l}{4}$$

式中，V_i 为该层的总剪力，等于该层以上水平外力(包括惯性力)的代数和；h 为该层柱高。

于是各层柱端弯矩为：

顶层：$$M_3=\frac{32.71\times5}{4}=40.8875\text{kN}\cdot\text{m}$$

中层：$$M_2=\frac{(32.71+16.78-30)\times5}{4}=24.4\text{kN}\cdot\text{m}$$

底层：$$M_1=\frac{(32.71+16.78-30+9.55)\times5}{4}=36.3\text{kN}\cdot\text{m}$$

刚架弯矩幅值图如图 12.41(e)所示，对于横梁的杆端弯矩可由刚结点力矩平衡推得。

12.10 计算频率的近似法

由以上各节讨论可知，随着结构自由度的增加，计算自振频率的工作量也随之加大。但是，在许多工程实际问题中，较为重要的通常只是结构前几个较低的自振频率。这是因为频率越高，则振动速度越大，因而介质的阻尼影响也就越大，相应于高频率的振动形式也就愈不易出现。基于这种原因，用近似法计算结构的较低频率以简化计算就非常必要了。下面介绍两种常用的方法。

1. 能量法

结构在振动中，具有两种形式的能量，一种是由于具有质量和速度而构成的动能，另一种则是由于结构变形而存储的应变能。根据能量守恒定律，结构在无阻尼自由振动中的任何时刻，其动能和应变能之和应当保持不变。

以梁的自由振动为例，假设其位移可表示为：

$$y(x,\ t)=y(x)\sin(\omega t+\varphi)$$

式中，ω 是自振频率。对 t 微分，可得出速度计算式

$$v=\dot{y}(x,\ t)=y(x)\omega\cos(\omega t+\varphi)$$

梁的弯曲应变能为：

$$\begin{aligned}V_\varepsilon &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2\mathrm{d}x}{EI} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[y''(x,t)\right]^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\sin^2(\omega t+\varphi)\int_0^l EI\left[y''(x)\right]^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其最大值为：

$$V_{\varepsilon\max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[y''(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

梁的动能为：

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \bar{m}v^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)\int_0^l \bar{m}y^2(x)\,\mathrm{d}x$$

其最大值为：

$$T_{\max}=\frac{1}{2}\omega^2\int_0^l \bar{m}y^2(x)\mathrm{d}x$$

式中，$m(x)$为结构上的分布质量。

当 $\sin(\omega t+\varphi)=0$ 时，位移和应变能为零，速度和动能为最大值，而体系的总能量即为 $T_{\max}$。

当 $\cos(\omega t+\varphi)=0$ 时，速度和动能为零，位移和应变能为最大值，而体系的总能量即为 $V_{\varepsilon\max}$。

根据能量守恒定律，可知

$$T_{\max}=V_{\varepsilon\max}$$

由此求得频率如下：

$$\omega^2=\frac{\int_0^l EI[y''(x)]^2\mathrm{d}x}{\int_0^l \bar{m}y^2(x)\mathrm{d}x} \tag{12-80}$$

如果梁上还有集中质量 m_i（$i=1$，2，…，n），则上式应改为：

$$\omega^2=\frac{\int_0^l EI[y''(x)]^2\mathrm{d}x}{\int_0^l \bar{m}y^2(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n m_i y_i^2} \tag{12-81}$$

式(12-81)就是用瑞利法求自振频率的公式。利用此公式求自振频率时必须知道振型曲线 $y(x)$，但 $y(x)$事先往往未知，故只能假设一个 $y(x)$来进行计算。若假设的曲线恰好与第一振型吻合，则可求得第一频率的精确值；若假设的曲线恰好与第二振型吻合，则可求得第二频率的精确值……但假设的曲线往往是近似的，故求得的频率亦为近似值。由于假设高频率的振型较为困难，常使误差很大，故这种方法只适宜计算第一频率。在假设曲线 $y(x)$时，至少应满足边界条件。为了提高精度，通常可采用某一静荷载 $q(x)$（例如结构的自重）作用下的弹性曲线作为 $y(x)$的近似表达式，然后由式(12-81)即可求得第一频率的近似值。此时，应变能可用相应荷载 $q(x)$所做的功来代替，即

$$V_\varepsilon=\frac{1}{2}\int_0^l q(x)y(x)\mathrm{d}x$$

而式(12-81)可改写为：

$$\omega^2=\frac{\int_0^l q(x)y(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \bar{m}y^2(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n m_i y_i^2} \tag{12-82}$$

如果取结构自重作用下的变形曲线作为 $y(x)$的近似表达式（注意，如果考虑水平振动，则重力应沿水平方向作用），则式(12-81)可改写为：

$$\omega^2=\frac{\int_0^l q(x)y(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n m_i g y_i}{\int_0^l \bar{m}y^2(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n m_i y_i^2} \tag{12-83}$$

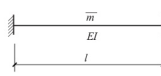


图 12.42

【例 12－16】 试用能量法求图 12.42 所示两端固定等截面梁的自振第一频率($\bar{m}$为单位长度质量)。

解： 取梁的自重作用下的挠曲线作为 $y(x)$，即取

$$y(x)=\frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)$$

代入式(12－82)，得

$$\omega_1{}^2=\frac{\int_0^l q(x)y(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \bar{m}y^2(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n m_i y_i^2}=\frac{q\int_0^l \frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)\mathrm{d}x}{\bar{m}\int_0^l\left[\frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)\right]^2\mathrm{d}x}=\frac{504}{l^4}\frac{EI}{\bar{m}}$$

$$\omega_1=\frac{22.45}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

精确解为 $\omega_1=\frac{22.37}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$，可见能量法的精度是很好的。

【例 12－17】 试用能量法求等截面简支梁的第一频率。

解：（1）假设 $y(x)$为抛物线，即

$$y(x)=\frac{4a}{l^2}x(l-x)$$

$$y''(x)=-\frac{8a}{l^2}$$

代入式(12－80)，得

$$\omega_1{}^2=\frac{\int_0^l EI\left[y''(x)\right]^2\mathrm{d}x}{\int_0^l \bar{m}y^2(x)\mathrm{d}x}=\frac{EI\int_0^l\frac{64a^2}{l^4}\mathrm{d}x}{\bar{m}\int_0^l\frac{16a^2}{l^4}x^2(l-x)^2\mathrm{d}x}=\frac{EI}{\bar{m}}\frac{120}{l^4}$$

$$\omega_1=\frac{10.95}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

（2）假设 $y(x)$为均布荷载 q 作用下的挠曲线，即

$$y(x)=\frac{q}{24EI}(l^3x-2lx^3+x^4)$$

代入式(12－82)，得

$$\omega_1{}^2=\frac{\int_0^l q(x)y(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \bar{m}y^2(x)\mathrm{d}x}=\frac{\frac{q^2l^5}{120EI}}{\bar{m}\left(\frac{q}{24EI}\right)^2\frac{31}{630}l^9}$$

$$\omega_1=\frac{9.87}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

（3）假设 $y(x)$为正弦曲线，即

$$y(x)=a\sin\frac{\pi x}{l}$$

代入式(12－80)，得

$$\omega_1{}^2=\frac{\int_0^l EI[y''(x)]^2\mathrm{d}x}{\int_0^l \bar{m}y^2(x)\mathrm{d}x}=\frac{EIa^2\frac{\pi^4}{l^4}\int_0^l\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)^2\mathrm{d}x}{\bar{m}a^2\int_0^l\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)^2\mathrm{d}x}=\frac{EI}{\bar{m}}\frac{\pi^4}{l^4}$$

$$\omega_1=\frac{9.8696}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

正弦曲线是第一主振型的精确解，因此由它求得的 ω 即为第一频率的精确解。根据均布荷载作用下的挠度曲线求得的 ω 具有很高的精度。

2. 质量集中法

将体系的分布质量集中于若干点上，根据静力等效的原则，使集中后的质点重力与原来的分布质量的重力互为静力等效(合力相等)；最终把无限自由度体系的振动问题简化为有限自由度体系的振动问题。显然，集中质量的数目愈多，所得结果就愈精确，但相应计算工作量也愈大。这种方法可用于求梁、拱、刚架、桁架等各类结构。

【例 12－18】 试求具有均布质量$\bar{m}$的简支梁的自振频率。

解： 在图 12.43(a)、(b)、(c)中，分别将梁分为二等段、三等段、四等段，每段质量集中在该段的两端，这时体系分别简化为具有一、二、三个自由度的体系。根据这三个计算简图，可分别求出第一频率、前两个频率、前三个频率。

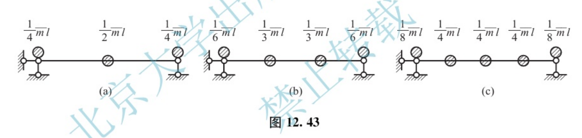


图 12.43

图 12.43(a)：$\omega_1=\frac{9.80}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$，$\omega_1$ 的精确解为 $\omega_1=\frac{9.87}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$，二者比较，近似法的误差为 0.7%。

图 12.43(b)：$\omega_1=\frac{9.86}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$，$\omega_2=\frac{38.2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$

此时，ω_1 与精确解的误差为 0.1%；ω_2 精确解为 $\omega_2=\frac{39.48}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$，其近似解误差为 3.24%。

图 12.43(c)：$\omega_1=\frac{9.865}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$，$\omega_2=\frac{39.2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$，$\omega_3=\frac{84.6}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$

此时，ω_1与精确解的误差为 0.05%；ω_2与精确解的误差为 0.7%；ω_3的精确解为 $\omega_3=\frac{88.83}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$，其近似解的误差为 4.8%。

由此可见，集中质量法能给出良好的近似结果，故在工程中常被采用。但在选择集中质量的位置时，必须注意结构的振动形式，而将质量集中在振幅较大的地方，才能使所得

的频率值较为正确。例如在计算简支梁的最低频率时，由于其相应的振动形式是对称的，且跨中振幅最大，故应将质量集中在跨中；又如对于图 12.44(a)所示的刚架，当它作对称振动时，各结点无线位移，这时应将质量集中于杆件的中点，如图 12.44(b)所示；而在反对称振动时，应将质量集中在结点上，如图 12.44(c)所示。

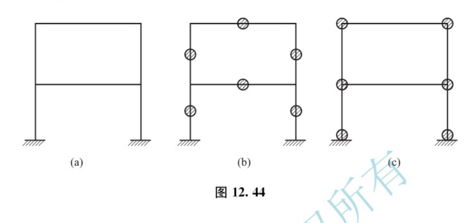


图 12.44

本 章 小 结

本章讨论了结构在动荷载作用下的反应。其主要内容如下。

1）动力计算的特点、动荷载的分类及结构的振动自由度

体系的振动自由度数目与质量有关，又不完全取决于质量数目，因此要根据具体问题“按振动自由度的定义”来确定。

2）单自由度体系的自由振动

建立体系振动方程的方法最常用的是动静法。这种方法是将惯性力加于质点上作为平衡问题来建立运动方程。在给定条件下能熟练计算自振频率和自振周期。

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{1}{m\delta}}=\sqrt{\frac{g}{W\delta}}=\sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}},\ T=\frac{2\pi}{\omega}。$$

测阻尼比最常用的方法是利用结构产生的初位移来获得自由振动记录，从而利用 $\xi\approx\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{y_k}{y_{k+n}}$ 实测阻尼比。由于阻尼比一般很小，它对频率、周期的影响一般可忽略。

3）单自由度体系的受迫振动

在简谐荷载作用下，平稳阶段体系也是按荷载频率振动的简谐振动，当荷载频率和体系的自振频率较接近时，就会产生共振。在工程上应避免共振现象产生。

无阻尼情况简谐荷载作用下的动力系数的计算公式是 $\beta=\dfrac{1}{1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}}$，当动荷载作用在单自由度体系的质点上时，各截面的最大动内力和最大动位移可采用统一的动力系数。

4）两个自由度体系的自由振动

两个自由度体系有两个自振频率，相应地有两个主振型，会验证主振型的正交性。

5）两个自由度体系的受迫振动

两个自由度体系在简谐荷载作用下的振幅及动内力幅值的计算。

对两个自由度体系，各质点的振幅、动内力幅值没有一个统一的动力系数。

6）多自由度体系的自由振动

多自由度体系的自振频率的个数等于振动自由度数目，全部频率由小到大排列。

不管振动方程用哪种方法建立，多自由度体系的自由振动最终归结为求解频率方程和振型方程，从数学的角度看属于矩阵特征值问题。

7）振型分解法

振型分解法将多自由度体系的振动问题转化为单自由度体系的振动计算问题。从处理方法上看，它使复杂的问题分解为简单的问题；从力学现象上看，它使我们看出复杂运动与主振型之间关系的规律。

8）能量法

能量法是计算体系第一频率的一种实用近似方法，这种方法的关键在于假设位移曲线。在假设位移曲线时应满足边界条件。

关键术语

动荷载(dynamic load)；静荷载(static load)；简谐荷载(harmonic load)；周期荷载(periodic load)；突加荷载(Suddenly applied constant load)；随机荷载(random load)；自由度(degree - of - freedom)；集中质量法(method of lumped mess)；单自由度体系(single degree - of - freedom system)；广义坐标法(generalized coordinate)；自由振动(free vibration)；达朗贝尔原理 (D'Alembert's principle)；刚度法(stiffness method)；柔度法(flexibility method)；自振周期(natural period)；频率 (frequency)；圆频率(circular frequency)；振幅(Amplitude of vibration)；初始相位角(initial phase angle)；强迫振动(forced vibration)；动力系数(magnification factor)；共振(resonance)；第一振型(first mode shape)；阻尼(damping)；阻尼比(damping ratio)；特征方程(characteristic equation)；主振型的正交性(orthogonality of normal modes)；质量矩阵(mass matrix)；刚度矩阵(stiffness matrix)。

习 题 12

一、思考题

1. 动荷载和静荷载的主要区别是什么？
2. 结构动力计算和静力计算的主要区别是什么？
3. 结构动力计算中的自由度概念与体系几何组成分析中的自由度概念有何区别？
4. 柔度法和刚度法所建立的自由振动微分方程是相通的吗？试举例说明。
5. 柔度矩阵和刚度矩阵存在什么关系？
6. 为什么说结构的自振周期和自振频率是结构固有的性质？
7. 低阻尼对自振频率和振幅有何影响？
8. 什么是动力系数？

9. 什么是主振型？什么是主振型的正交性？

10. 两个自由度结构发生共振的可能性有几个？为什么？

11. 求自振频率和主振型时能否利用对称性？怎样利用对称性简化计算？

12. 振型分解法中用到了叠加原理，在结构动力计算中，什么情况下能用这个方法？什么情况下不能用？

13. 应用能量法时，所设的位移函数应满足什么条件？

二、填空题

1. 图 12.45 所示体系振动自由度的数目分别是：(a)________、(b)________、(c)________、(d)________、(e)________、(f)________、(g)________、(h)________。

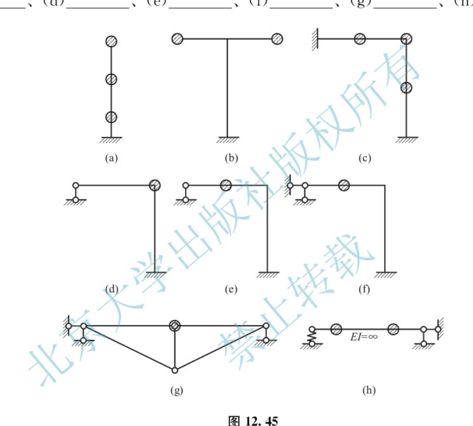


图 12.45

2. 无阻尼单自由度振动体系的自振频率与体系的约束有关，体系的约束越刚强，则频率________。

3. 单自由度体系的有阻尼自由振动，阻尼对________的影响很大，对________的影响极小。

4. 多自由度振动体系的刚度矩阵 $[K]$ 和柔度矩阵$[\delta]$的关系是__________。

5. 已知两个自由度体系的质量矩阵为$[M]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$，振型为$\{A\}^{(1)}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$，$\{A\}^{(2)}=\begin{Bmatrix} 1 \\ A_2^{(2)} \end{Bmatrix}$，则 $A_2^{(2)}=$________。

三、判断题

1. 凡是大小、方向、作用点位置随时间变化的荷载，在结构动力计算中都必须看作动力荷载。(　　)

2. 仅在恢复力作用下的振动称为自由振动。(　　)

3. 当结构中某杆件的刚度增加时，结构的自振频率不一定增大。(　　)

4. 结构的振动自由度个数与结构是静定还是超静定有关。(　　)

5. 图 12.46(a)体系的自振频率比图 12.46(b)的小。(　　)

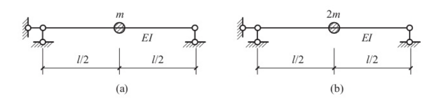


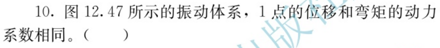
图 12.46

6. 由于阻尼的存在，任何振动都不会长期继续下去。(　　)

7. 单自由度体系，在考虑阻尼时，频率会变小。(　　)

8. 为了避免共振，要错开动荷载频率和结构固有频率，一般通过改变动荷载的频率来实现。(　　)

9. 用瑞利法时若取重力作用下的静变形曲线为位移形函数，求得的第一频率的精度很高。(　　)



10. 图 12.47 所示的振动体系，1 点的位移和弯矩的动力系数相同。(　　)

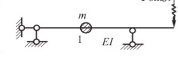


图 12.47

四、选择题

1. 单自由度结构自由振动的振幅取决于(　　)。

A. 初位移　　B. 初速度

C. 初位移、初速度 与质量　　D. 初位移、初速度和结构的自振频率

2. 若要减小受弯结构的自振频率，则应使(　　)。

A. EI 增大，m 增大　　B. EI 减少，m 减少

C. EI 减少，m 增大　　D. EI 增大，m 减少

3. 单自由度结构其他参数不变，只有刚度增大到原来的两倍，则周期比原来的周期(　　)。

A. 减少到 1/2　　B. 减少到 $1/\sqrt{2}$

C. 增大到 2 倍　　D. 增大到$\sqrt{2}$

4. 结构的跨度、约束、质点位置不变，下列哪种情况自振频率最小(　　)。

A. 质量小，刚度小　　B. 质量大、刚度大

C. 质量小、刚度大　　D. 质量大、刚度小

5. 图 12.48 所示结构中，不计杆件分布质量，当 EI_2 增加，则结构自振频率(　　)。

A. 不变　　B. 增大

C. 减少　　D. 增大或是减少取决于 EI_2 和 EI_1 的比值

6. 将图 12.49(a)中支座 B 换成图 12.49(b)的 BC 杆，不计杆件分布质量，EI_2、EI_1、h 为常数，则图 12.49(a)结构自振周期比图 12.49(b)结构自振周期(　　)。

A. 大　　B. 小

C. 小或相等，取决于阻尼比　　D. 大或小取决于 EI_2 和 EI_1 的比值

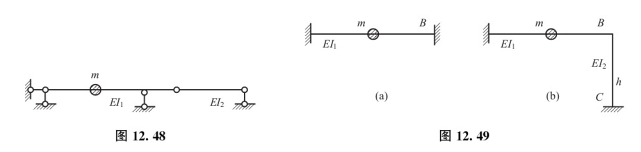


图 12.48　　图 12.49

7. 在单自由度体系受迫振动的动位移计算公式 $[y(t)]_{max}=\beta y_{st}$ 中，y_{st} 是指(　　)。

A. 质量的重力所引起的静位移

B. 动荷载的幅值所引起的静位移

C. 动荷载引起的动位移

D. 质量的重力和动荷载幅值所引起的静位移

8. 当荷载频率 θ 接近结构的自振频率 ω 时，(　　)。

A. 可作为静荷载处理　　B. 荷载影响非常小

C. 会引起共振　　D. 可以不考虑阻尼的影响

五、计算题

1. 求图 12.50 所示两个体系的自振频率。弹簧的刚度系数 $k_1=\dfrac{12EI}{l^3}$。

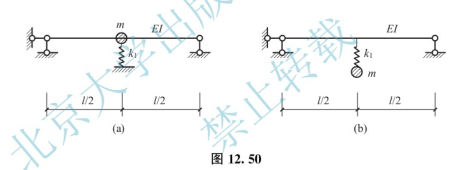


图 12.50

2. 如图 12.51 所示，排架横梁刚度可视为无穷大，不计其变形，并将排架质量集中在横梁上，试确定其自振频率。

3. 求图 12.52 所示体系的自振频率。不计杆件的自重和阻尼影响。

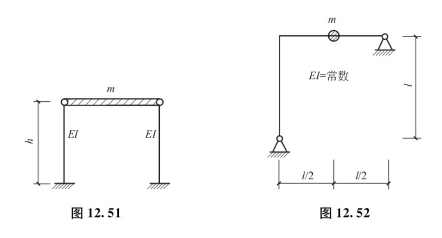


图 12.51　　图 12.52

4. 求图 12.53 所示体系的自振频率。$I_1=\infty$，不计杆件的自重和阻尼影响。

5. 已知：$y_0=0.1\text{cm}$，$W=20\text{kN}$，$E=2\times10^4\text{MPa}$，$I=10\times10^4\text{cm}^4$。求图 12.54 所示柱顶端的位移振幅、最大速度和最大加速度。

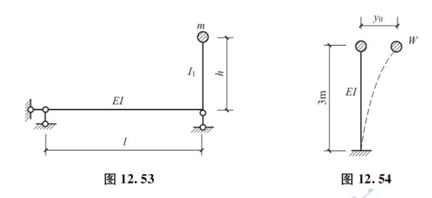


图 12.53　　图 12.54

6. 如图 12.55 所示单跨排架，横梁 $EA=\infty$，屋盖系统及柱子的部分质量集中在横梁处。在柱顶水平集中力 $F=120\text{kN}$ 作用下，排架柱顶产生侧移 $y_0=0.6\text{cm}$。这时突然释放，排架作自由振动，并测得周期 $T_d=2.0\text{s}$，以及振动一周后柱顶的侧移 $y_1=0.5\text{cm}$。试求排架的阻尼系数和振动 5 周后柱顶的振幅 y_5。

7. 图 12.56 所示悬臂梁具有一自重为 $mg=12\text{kN}$ 的集中质量，其上受有振动荷载，其中 $F=5\text{kN}$。若不考虑阻尼，试分别计算该梁在振动荷载为每分钟振动 300 次和 600 次两种情况下的最大竖向位移和最大弯矩。已知 $l=2\text{m}$，$E=210\text{GPa}$，$I=3.4\times10^{-5}\text{m}^4$。梁的自重不计。

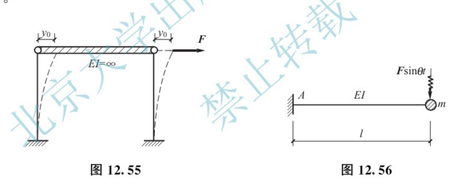


图 12.55　　图 12.56

8. 求图 12.57 所示体系的自振频率。

9. 图 12.58 所示结构在柱顶有电动机，试求电动机转动时的最大水平位移和柱端弯矩的幅值。已知电动机和结构的重力集中于柱顶，$W=20\text{kN}$，电动机水平离心力的幅值 $F=2.5\text{kN}$，电动机的转速 $n=550\text{r/min}$，柱的线刚度 $i=\dfrac{EI_1}{h}=5.88\times10^8\text{N}\cdot\text{cm}$。

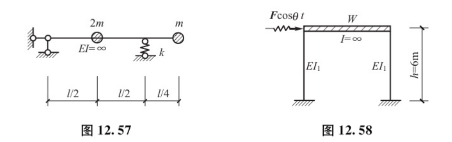
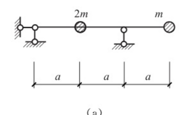
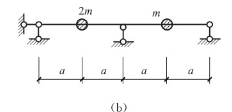


图 12.57　　图 12.58

10. 求图 12.59 所示梁的自振频率和主振型。梁的自重不计，EI=常数。



(a)



(b)

图 12.59

11．求图 12.60 所示刚架的自振频率和主振型，并验证主振型的正交性。已知：弹性模量 $E=2\times10^5$ MPa，惯性矩 $I=1.8\times10^4\text{cm}^4$，集中质量 $m=1.5$t，梁、柱自重不计。

12．求图 12.61 所示刚架的自振频率和主振型。

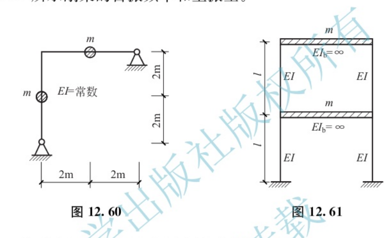


图 12.60　　图 12.61

13．图 12.62 所示梁在质点 2 处作用有简谐荷载，$F=2$kN，$\theta=1.5\omega_1$。计算质点 1、2 的位移幅值，并求出质点 1 截面处的弯矩幅值。

14．图 12.63 所示两层刚架的第二层楼面处沿水平方向作用一简谐荷载，其幅值 $F=5$kN，机器转速 $n=150$r/min。试求第一、第二层楼面处的振幅值和柱端截面 A 的弯矩幅值。

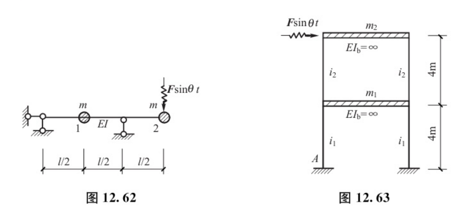


图 12.62　　图 12.63

15．用振型分解法重做 14 题。

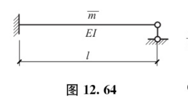


图 12.64

16．试用能量法求图 12.64 所示等截面梁的自振第一频率。设以梁在自重下的弹性曲线为其振动形式($\bar{m}$为单位长度质量)。

17．试用能量法求图 12.65 所示等截面梁的自振第一频率($\bar{m}$为单位长度质量)。

18. 用质量集中法求图 12.66 所示刚架的最低频率。

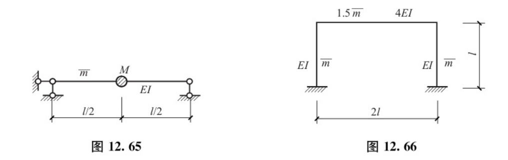


图 12.65　　图 12.66



第13章 结构塑性极限荷载简介

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
杆的极限内力、结构的极限荷载	熟悉	轴向拉压杆结构的极限荷载
	了解	圆杆的极限扭矩
	掌握	极限弯矩和塑性铰
	了解	梁和刚架的极限荷载

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
极限弯矩和塑性铰	掌握	结构设计，极限能力的分析
梁和刚架的极限荷载	了解	结构在意外荷载作用下的极限能力


导入案例

在强震下建筑不倒塌的秘密

建筑物当遭遇到超过抗震设防烈度的大地震作用时，将发生严重破坏，有的甚至会倒塌。抗震设防目标中的“小震不坏、中震可修、大震不倒”，就是要保证在大震时一些建筑物虽然已达到不可修复的破坏，但是不要倒塌，以保证建筑物内的人们能有足够的生存空间逃离或等待救援。图 13.1 所示为某建筑在大地震作用下破坏的残骸，显然，建筑物里面的人员已几乎没有生还的可能了。图 13.2 所示某建筑虽然在大地震作用下发生了严重的破坏，但整体结构依然矗立，里面的人员没有像图 13.1 所示建筑那样完全被掩埋在瓦砾之中。

那么，怎样使建筑能抵御大地震的作用而不倒塌呢？抗震专家有许多措施，其中之一就是发挥材料的塑性承载极限，即在大震时，结构(钢结构或钢筋混凝土结构)受力较大截面的应力超过了弹性极限，该处将进入弹塑性阶段，而此时截面并没有断裂，仍然可以继续承受荷载。当地震作用继续增加，使得结构多处截面进入完全塑性状态，结构变成了几何可变体时，相应的外荷载也达到了结构的塑性极限值，这时结构就会倒塌。一般的地震作用持续时间都比较短，往往是在结构还未成为几何可变体时，地震就已结束了。所以，结构有较多的塑性极限储备，这就是保证建筑“大震不倒”的一道秘密防线。

本章将从单个杆件的塑性极限内力开始，研究一些简单结构的塑性极限荷载的计算。



图 13.1



图 13.2

13.1 概　　述

工程中，对于钢材等弹塑性材料，按照前面所述的弹性分析方法，计算出杆件所能承受的最大内力为弹性极限内力，相应结构的极限荷载为弹性极限荷载。结构在弹性极限荷载作用下，对于具有弹塑性性质的材料，此时结构并非立即产生破坏，而是即将进入弹塑性受力状态，继续加载后，结构的受力状态将变得很复杂。从工程需要出发，在对材料的弹塑性性质做出科学的理想化假设后，方能确定结构的最终极限荷载，与此对应的结构体系将由几何不变体系转化为几何可变体系。

在对结构进行塑性分析时，从工程需要出发，为使计算简化，一般对弹塑性材料如常见的低碳钢原有的应力应变关系(图 13.3)进行简化。将图中屈服阶段理想化为向右无限延长的水平线，得到如图 13.4 所示的应力应变关系图，亦称为理想弹塑性材料的应力应变关系：在应力到达 A 点之前应力应变为线弹性关系，当应力达到 A 点时材料即进入塑性状态，对应的杆件的内力称为弹性极限内力。此时，应力不再增加，而应变会持续增加。若在 C 点处卸载，卸载直线与 OA 平行，即为弹性状态。钢筋混凝土杆件可按理想弹塑性材料进行分析。

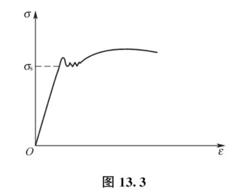


图 13.3

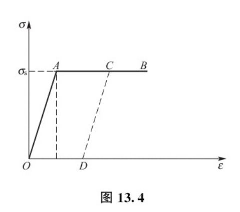


图 13.4

对于受轴向拉压变形的杆件，由于杆件各截面上的应力均匀分布，随着荷载的增加，各点上的应力将会同时到达屈服极限值 σ_s。根据图 13.4，此时杆件将会发生无限的伸长或缩短，成为几何可变体。因此轴向拉压杆件的弹性极限轴力与塑性极限轴力相同。

对于受扭转变形的杆件，首先是在最大扭矩所在截面周边处的剪应力达到屈服剪应力，进入塑性状态，此时截面的扭矩称为弹性极限扭矩。随着荷载的增加，屈服剪应力向截面中心发展，直到整个截面各点的剪应力完全达到屈服状态，此时截面的扭矩称为塑性极限扭矩。

同理，对于受弯曲变形的杆件，首先是在最大弯矩所在截面边缘处的正应力达到屈服，进入塑性状态，此时截面的弯矩称为弹性极限弯矩。随着荷载的增加，屈服正应力向截面中央发展，直到整个截面各点的正应力完全达到屈服状态，此时截面的弯矩称为塑性极限弯矩。

杆件截面完全进入塑性状态时的内力称为塑性极限内力，在结构中，当某一局部的应力达到极限值时，结构的很多部分并没有破坏，特别是超静定结构，此时若再增加荷载，结构还可在局部完全进入塑性状态而大部分仍在弹性状态下继续工作，直至荷载继续增大到出现一个或多个完全塑性区域，以至于结构成为几何可变体系而退出工作。结构成为几何可变体系时对应的荷载称为塑性极限荷载，也就是结构的极限荷载。

由于塑性极限荷载是在结构某截面上各点应力完全达到屈服应力σ_s而得出的，因为整个截面发生了塑性变形，所以结构也会发生了较大的位移。因此，对于在位移方面有较严格要求的结构，是不适宜用塑性极限荷载的方法进行设计的。

13.2 轴向拉压杆结构的塑性极限荷载

轴向拉压杆件的弹性极限轴力与塑性极限轴力相同，所以，对于静定拉压杆结构，只要一个杆件达到极限轴力，结构就会成为几何可变体，因此静定拉压杆结构也就只有一种极限荷载。

但是，对于如图 13.5 所示的超静定拉压杆结构，若 3 个杆件的材料、截面相同，经解超静定计算后，可知 2 杆的轴力大于 1、3 杆的轴力，会率先进入屈服状态，其内力达到塑性极限轴力 $N_{2u}=\sigma_s A_s$。而此时，1、3 杆仍在弹性状态下，结构可在 2 杆承受不变的塑性极限轴力 N_{2u}的情况下继续增加荷载。当荷载继续增大，经静定分析后，显然 1 杆也进入塑性状态，如图 13.6 所示，结构成为几何可变体系，此时的 F_u 称为结构的塑性极限荷载。

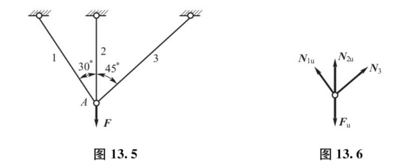


图 13.5　　图 13.6

总结图 13.5 所示的超静定拉压杆结构的塑性极限荷载计算过程：首先是判断出结构为 1 次超静定，再判断出结构中 3 个杆件中 2 杆的内力最大，最先达到塑性极限轴力。然后通过静力平衡关系计算出剩余静定结构中的 1 杆与 3 杆的最大内力是发生在 1 杆上，当

1 杆也达到塑性极限轴力时，结构即成为几何可变体系。此时的外力即为该结构的塑性极限荷载。对于由截面、材料不同的杆件组成的结构，或是结构形式复杂，不能明显判断最大内力发生在哪个杆件时，为了避免求解超静定结构，可以采用对杆件轮流试算的方法，即轮流设定任意两杆屈服，然后利用平衡条件求得对应的 F_u 值，比较相应的 F_u 值，最小者即为塑性极限荷载。

【例 13-1】 图 13.7(a)所示抗弯刚度无穷大的梁，承受集中荷载 F 作用，两吊杆的长度和 EA 均相同，杆的屈服应力 $\sigma_s=240\text{MPa}$。试求该荷载形式的极限荷载值 F_u。

解： 该结构为 1 次超静定，可直观地判定出 2 杆将首先达到屈服。继续增加荷载直到 1 杆也达到屈服，则结构成为几何可变体，如图 13.7(b)所示。

图 13.7

在此极限状态下由平衡条件 $\sum M_A=0$ 可得

$$F_u\times 2a=N_{1u}\cdot a+N_{2u}\times 2a$$

$$F_u=\frac{1}{2}N_{1u}+N_{2u}=\frac{3}{2}\sigma_s A$$

由弹性关系计算的最大内力与荷载的关系为

$$N_1=\frac{1}{2}N_2,\quad N_2=\sigma_s A$$

$$F_e\times 2a=\frac{1}{2}\sigma_s A\cdot a+\sigma_s A\times 2a$$

可得该结构的弹性极限荷载 F_e：

$$F_e=\frac{5}{4}\sigma_s A$$

塑性极限荷载与弹性极限荷载比较：

$$\frac{F_u}{F_e}=\frac{3\sigma_s A}{2}\frac{4}{5\sigma_s A}=\frac{6}{5}$$

考虑塑性的极限荷载虽然有所提高，但是结构的位移也增加了许多，读者可进行弹性位移和塑性位移的计算和比较。

13.3 圆杆的极限扭矩

1. 截面上屈服应力 τ_s 的变化规律

工程中，承受扭转变形的大多为弹塑性材料制成的圆截面杆件，弹性极限状态时截面的应力分布如图 13.8 所示，其弹性极限扭矩为 M_e。

$$\tau=\frac{M}{W_p}$$

$$M_e=\tau_s W_p=\tau_s\frac{\pi d^3}{16}$$

截面处于弹性极限状态时，仅是圆截面周边各点的应力达到 τ_s，若继续增加外荷载，屈服应力 τ_s 将向截面内发展。若在距轴心为 r 处的应力也达到了 τ_s 时，如图 13.9 所示，截面在 $R—r$ 的圆环面积内各点的应力均为 τ_s，而在半径 r 以内的截面上各点的应力仍是弹性状态，按线性分布。显然，若再继续增加荷载，使得整个截面各点的应力均达到 τ_s 时，如图 13.10 所示，截面的扭矩即为塑性极限扭矩。

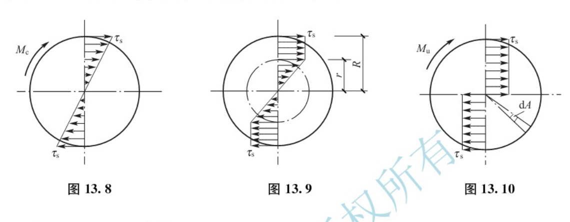


图 13.8　　图 13.9　　图 13.10

2. 塑性极限扭矩的计算

由上述截面剪应力的变化规律可知：塑性极限扭矩是截面各点的剪应力均达到 τ_s，根据图 13.10 中各点上的力对轴心的力矩可得出

$$M_u = \int_A \rho \cdot \tau_s dA = \tau_s \int_A \rho dA = \tau_s \frac{\pi d^3}{12}$$

显然，塑性极限扭矩 M_u 大于弹性极限扭矩 M_e，两者进行比较：

$$\frac{M_u}{M_e} = \frac{\pi d^3}{12} \frac{16}{\pi d^3} = \frac{4}{3}$$

M_u 比 M_e 提高了 33%，亦即承载能力提高了同样大小。

与轴向拉压杆比较，杆件在发生扭转变形以及后面要叙述的弯曲变形时，由于截面上各点应力在初始弹性阶段时分布不均匀，当最大应力达到屈服时需要再继续增加荷载才会使整个截面的应力都达到屈服。所以，静定杆件也有弹性极限内力与塑性极限内力之分。

对于矩形截面杆，弹性阶段时的应力分布需按弹性力学求得，当整个截面的应力都达到屈服极限时，其塑性极限扭矩 M_u 的计算反而比较简单：过 4 个角点绘制 45°斜线，得 4 个区域，每个区域的应力方向与周边平行，按静力矩合成即可得到 M_u 值。读者可参阅混凝土结构书籍，自行计算。

13.4 极限弯矩和塑性铰

1. 截面上屈服应力 σ_s 的变化规律

对于弯曲的杆件，在弹性状态下横截面上正压力的分布如图 13.11 所示，其弹性极限弯矩可由公式

$$\sigma_s = \frac{M_e}{W_z} \quad M_e = \sigma_s W_z$$

得出，其中 M_e 为横截面的弹性极限弯矩。此时，仅是弯曲杆件截面的上下边缘各点的应力达到了 σ_s，若继续增加外荷载，屈服应力 σ_s 将向截面中央发展。若在距边缘处为 a 的应力也达到了 σ_s，则范围内的各点应力均达到 σ_s，而截面中间处各点的应力仍是弹性状态(图 13.12)。显然，若再继续增加外荷载，使得整个截面上各点的应力均达到 σ_s 时，截面的弯矩就是塑性极限弯矩(图 13.13)。

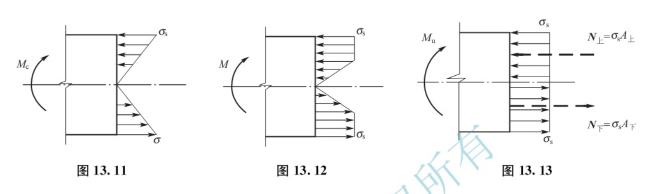


图 13.11　　图 13.12　　图 13.13

2. 塑性铰与中性轴的位置

当截面上的应力全部达到 σ_s 时，截面进入可承受塑性极限弯矩且发生屈服转动的状态，其转动方向与塑性极限弯矩方向相同，即该截面如同一个可转动的铰一样。与前述的光滑理想铰不同，该处的转动可承受塑性极限弯矩，因此称为塑性铰(转动方向同弯矩方向，是单向铰)。

塑性铰所在截面的中性轴(拉、压应力分界线)可根据截面 $\sum X=0$ 的平衡条件，由轴两侧面积相等确定出来。对于对称截面，塑性极限状态下的中性轴和弹性状态下的中性轴在同一个位置。当截面不是对称时，如图 13.14(a)所示截面，z 轴为弹性状态下的中性轴，其位置由面积矩(静矩)$A_上\ y_上 = A_下\ y_下$ 的关系式来确定，由图中可见，$A_上 \neq A_下$。截面进入塑性极限状态后，中性轴的位置按面积 $A_上 = A_下$ 的关系式确定，其位置如图 13.14(b)所示。在截面的弯矩由弹性极限弯矩提高到塑性极限弯矩时，截面的弹性中性轴也在向塑性中性轴的位置移动。

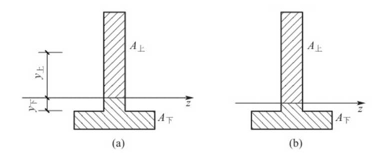


图 13.14

3. 塑性极限弯矩的计算

由上述截面上正压力的变化规律可知：塑性极限期间是截面各点的正压力均达到了 σ_s，根据图 13.14(b)中截面上各点的力对中性轴的力矩，可得出截面塑性极限弯矩 M_u。

$$M_u = \int_{A_上} y\sigma_s \mathrm{d}A + \int_{A_下} y\sigma_s \mathrm{d}A = \sigma_s(S_上 + S_下) = \sigma_s W_u$$

式中，S 为中性轴一侧面积对中性轴的面积矩(静矩)；W_u 为塑性抗弯截面模量。

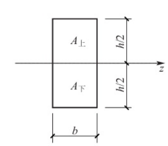


图 13.15

对于图 13.15 所示矩形截面，其塑性抗弯截面模量为

$$W_u=2\left(b\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{4}\right)=\frac{bh^2}{4}$$

而矩形截面的弹性抗弯截面模量为

$$W_e=\frac{bh^2}{6}$$

显然，塑性抗弯截面模量大于弹性抗弯截面模量。其比值为

$$\frac{W_u}{W_e}=\frac{bh^2}{4}\cdot\frac{6}{bh^2}=1.5$$

W_u 比 W_e 提高了 50%，亦即承载力提高了同样大小。

若令

$$\frac{W_u}{W_e}=f$$

称 f 为截面的塑性弯曲形状系数，表 13-1 列出了几种常见截面的 f 值。

表 13-1　常见截面的塑性弯曲形状系数

截面	工字形	薄壁圆形	矩形	圆形
f	1.15～1.17	1.27	1.5	1.7

13.5 梁和刚架的极限荷载

对于以弯曲变形为主的静定结构，在最大弯矩处出现一个塑性铰，结构即进入几何可变状态(图 13.16)而退出工作。所以，只要根据外荷载确定出静定梁上的最大弯矩与外荷载的关系，再根据截面的形状及梁的材料(σ_s)确定出塑性极限弯矩值，令最大弯矩等于塑性极限弯矩，就可求出静定梁的塑性极限荷载。

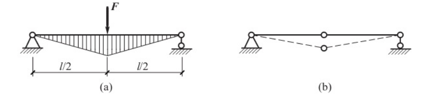


图 13.16

【例 13-2】 图 13.17(a)所示等截面梁，承受满跨均布荷载 q 作用，梁的屈服应力 $\sigma_s=240\text{MPa}$。试求该荷载形式的极限荷载值 q_u。

解： 绘制弯矩图如图 13.17(b)所示，显然截面 B 处由全梁的最大弯矩为

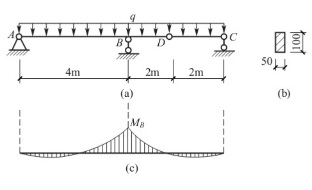


图 13.17

$$M_B=\frac{q}{2}\times 2^2+q\times 1\times 2=4q$$

截面的塑性极限弯矩为

$$M_u=\sigma_s W_u=240\times 10^3\times\frac{0.05\times 0.1^2}{4}=30\text{kN}\cdot\text{m}$$

当 $M_B=M_u$ 时，可得塑性极限荷载为

$$4q_u=30\quad q_u=\frac{30}{4}=7.5\text{kN/m}$$

当 $M_B=M_e$ 时，可得弹性极限荷载为

$$M_e=\sigma_s W_e=2400\times 10^3\times\frac{0.05\times 0.1^2}{6}=20\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$4q_e=20\quad q_e=\frac{20}{4}=5\text{kN/m}$$

此梁的塑性极限荷载还可由

$$q_u=fq_e=1.5\times 5=7.5\text{kN/m}$$

求得。

塑性极限荷载与弹性极限荷载比较：

$$\frac{q_u}{q_e}=\frac{7.5}{5}=1.5=f\text{（塑性截面形状系数）}$$

这也说明，对于等截面的静定梁，其塑性极限荷载等于弹性极限荷载的 f 倍。

对于图 13.18 所示包含有静定部分的超静定结构，若最大弯矩发生在如 BC 的静定部分，当其出现塑性铰时，BC 部分即成为几何可变体。因此，其极限荷载仍是按静定结构方式计算。

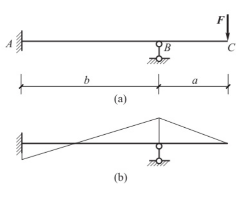


图 13.18

对于最大弯矩发生在超静定部分的超静定结构（图 13.19），一般来说，需要出现 $n+1$ 个（比超静定次数多一个）塑性铰，结构才会成为几何可变体，而对于各跨内等截面并且荷载同向的连续梁，各跨只要有 3 个铰就形成几何可变或几何瞬变的破坏机构。因此，超静定梁和刚架结构的塑性极限荷载的分析

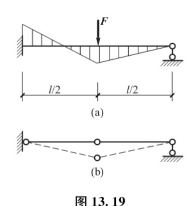


图 13.19

要先判断结构的超静定次数和塑性铰的位置。

当梁或刚架结构的第一个塑性铰出现时，对应的外荷载称为第一塑性极限荷载 F_{1u}；第二个塑性铰出现时，对应的外荷载称为第二塑性极限荷载 F_{2u}；直至第 $n+1$ 个塑性铰出现时，对应的外荷载称为最终塑性极限荷载 F_u。

F 由 F_e 向 F_{1u} 增加过程中，最大弯矩所在截面的屈服应力由边缘向截面中间发展，虽然没有完全屈服，但也产生了很大的变形，在此期间，也可能会有其他弯矩较大截面随着荷载的增加、截面弯矩的增加而进入此状态。此时的弯矩图形不能按照弹性关系计算求得，因此一般情况下是在极限状态下按静力平衡方法求得极限荷载。

类似于超静定拉压杆结构极限荷载的分析，超静定梁和刚架结构的极限荷载分析也是按最大弹性极限弯矩确定第一塑性铰发生的位置，然后以该塑性铰处的塑性极限弯矩为固定不变的外荷载来考虑平衡，进而确定下一个塑性铰出现的位置。在成为几何可变体的极限平衡状态下可确定相应极限荷载值。

总结以上分析可知，极限状态应满足以下 3 个条件：①由于塑性铰的单向性，所以结构在成为几何可变体时亦是按荷载方向作单向运动的，即单向机构条件；②在极限状态下，结构各截面的弯矩均小于塑性极限弯矩 M_u，即屈服条件(或称内力局限条件)；③极限荷载的分析是在结构由静定结构向几何可变体系过渡的极限状态下进行的，所以可用静力平衡条件计算，即平衡条件。因此，对于能明确判断出的极限状态，由于不必考虑变形关系，仅需按照静力平衡条件进行计算，所以其计算较超静定结构的计算要简单。另外，由于极限状态前的结构为静定结构，所以超静定结构的极限荷载值不受支座移动和温度变化的影响。

【例 13-3】 图 13.20(a)所示超静定梁，承受集中荷载 F 作用。已知梁的屈服应力为 σ_s，抗弯截面模量为 W_Z，塑性截面形状系数为 f。试求该荷载形式下的极限荷载值 F_u。

解： 本题为单跨一次超静定梁，应出现两个塑性铰时结构才能成为几何可变体系。由弹性关系计算的最大弯矩发生在梁的 A 端，所以第一塑性铰出现在 A 处，如图 13.20(b)所示。以 A 处承受不变的塑性极限弯矩 M_u，继续增加荷载，显然第二塑性铰应出现在集中力作用处的截面上，此时结构成为几何可变体系，如图 13.20(c)所示。

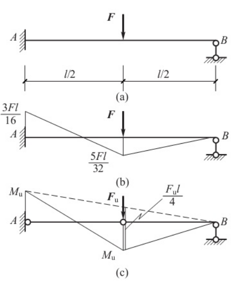


图 13.20

按平衡关系

$$\frac{1}{2}M_u+M_u=\frac{F_u l}{4}$$

可得

$$F_u=\frac{6M_u}{l}=\frac{6}{l}\sigma_s fW_Z$$

由弹性关系计算的最大弯矩与荷载的关系为

$$\frac{3F_e l}{16}=\sigma_s W_Z$$

可得该梁的弹性极限荷载

$$F_e = \frac{16}{3l}\sigma_s W_Z$$

塑性极限荷载与弹性极限荷载比较

$$\frac{F_u}{F_e} = \frac{6f\sigma_s W_Z}{l}\frac{3l}{16\sigma_s W_Z} = \frac{9}{8}f$$

【例 13-4】 求图 13.21(a)所示两跨超静定梁的极限荷载值 q_u。已知 $M_u = 360\text{kN}\cdot\text{m}$。

解：本题为多跨超静定梁，其破坏机构为各单跨破坏机构。

第一跨的破坏机构如图 13.21(b)所示，在梁的 A 端、跨中(为简化计算，近似用跨中弯矩代替最大弯矩)和 B 支座处出现塑性铰。以该 3 处承受相应不变的塑性极限弯矩，计算其塑性极限荷载 q_{1u}

按平衡关系，有

$$\frac{q_{1u}(12)^2}{8} = 540 + \frac{540+360}{2}$$

$q_{1u} = 55\text{kN/m}$(精确解答为 54.89kN/m。)

第二跨的破坏机构如图 13.21(c)所示，在梁的 B 支座和集中力处出现塑性铰。以该两处承受相应不变的塑性极限弯矩，计算其塑性极限荷载 q_{2u}。

按平衡关系，有

$$\frac{6q_{2u}(6)}{4} = 360 + \frac{360}{2}$$

$$q_{2u} = 60\text{kN/m}$$

比较这两个极限荷载值，显然，结构的塑性极限荷载为 $q_u = 55\text{kN/m}$。

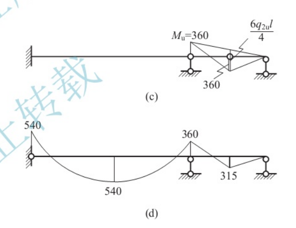


图 13.21

【例 13-5】 计算图 13.22(a)所示超静定刚架的极限荷载值 F_u。

解：本题为 3 次超静定结构，应出现 4 个塑性铰时结构才能成为几何可变体系。由弹性关系计算的最大弯矩发生在结构的 A、B 端，如图 13.22(b)所示，所以第一塑性铰出现在 A、B 处。以 A、B 处承受不变的塑性极限弯矩 M_u，继续增加荷载，显然第二塑性铰应出现在结构的 C、D 处，此时结构成为几何可变体系，如图 13.22(c)所示。

按平衡关系［图 13.22(d)］，有

$$\frac{1}{2}F_u h = 2M_u$$

可得

$$F_u = \frac{4M_u}{h}$$

对于复杂的荷载及结构形式，由于较难判断塑性铰出现的位置及顺序，需要依据以下

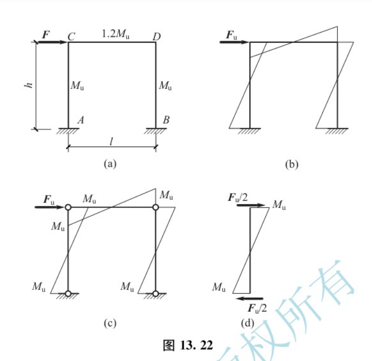


图 13. 22

3 个定理(其证明参看有关书籍)：①结构具有唯一极限荷载，即单向定理或唯一性定理；②极限荷载是结构破坏荷载的极小者，即上限定理或极限定理；③极限荷载是结构安全荷载(可接受荷载)的极大者，也即下限定理或极大定理，对多个可能出现的几何可变体系的极限平衡状态进行试算或用其他方法来确定极限荷载。本书不做更多的介绍，实际工程中可运用计算软件解决。

本 章 小 结

本章首先对钢材等弹塑性材料做出科学的理想化假设，按照杆件的不同受力情况，又分别介绍了杆件的弹性极限轴力与塑性极限轴力，杆件的弹性极限扭矩与塑性极限扭矩，杆件的弹性极限弯矩与塑性极限弯矩，塑性铰及塑性抗弯截面模量，结构的极限荷载等概念。

对于以弯曲变形为主的静定结构，在最大弯矩处出现一个塑性铰，结构即进入几何可变状态而退出工作。

对于包含有静定部分的超静定结构，若最大弯矩发生在静定部分，当其出现塑性铰时，该部分即成为几何可变体系。因此，其极限荷载仍是按静定结构方式计算的。对于最大弯矩发生在超静定部分的超静定结构，一般来说，需要出现 $n+1$ 个(比超静定次数多一个)塑性铰，结构才会成为几何可变体系，而对于各跨内等截面并且荷载同向的连续梁，各跨只要有 3 个铰就可形成几何可变或几何瞬变的破坏机构。因此，超静定梁和刚架结构的塑性极限荷载的分析要先判断结构的超静定次数和塑性铰的位置。一般情况下是在极限状态下按静力平衡方法求得极限荷载。

极限荷载计算具有以下特点：①由于塑性铰的单向性，所以结构在成为几何可变体系时也是按荷载方向作单向运动的；②极限状态下，结构各截面的弯矩均小于塑性极限弯矩 M_u；③极限荷载的分析是在结构由静定结构向几何可变体系过渡的极限状态下进行的，所以可用静力平衡条件计算；④对结构可能出现多个几何可变体系的极限平衡状态，需进

行试算或用其他方法来确定结构的极限荷载；⑤由于极限状态前的结构为静定结构，所以超静定结构的极限荷载值不受支座移动和温度变化的影响。

关键术语

塑性变形(plastic deformation)；塑性材料(ductile materials)；屈服(yield)；极限荷载(ultimate load)；极限弯矩(limit moment)；屈服弯矩(yield moment)；塑性铰(plastic hinge)。

习题 13

一、思考题

1. 解释静定拉压杆结构的极限荷载。
2. 塑性铰与理想光滑铰有何区别?
3. 一次超静定结构须出现 2 个塑性铰才是几何可变体吗？试举例说明。
4. 为什么静定拉压杆结构没有弹性极限荷载和塑性极限荷载的区别?
5. 在什么情况下不能考虑塑性计算?
6. 简述塑性极限荷载高于弹性极限荷载的原因。

二、填空题

1. 塑性铰与普通铰不同，它是一种________铰，只能沿________方向发生相对转动。
2. 静定结构的极限状态有________个塑性铰，一次超静定结构极限状态需有________个塑性铰，据此________推断出 n 次超静定结构极限状态一定出现 $n+1$ 个塑性铰。
3. 由理想弹塑性材料制成的超静定结构，从承受荷载到破坏，一般说来其工作阶段分为三个，即①________；②________；③________。
4. 在极限状态中，结构任一截面的弯矩绝对值将________极限弯矩。
5. 结构的极限荷载计算，就是要确定结构在________时所能承担的荷载值。
6. 对图 13.23 所示工字形截面来说，塑性极限弯矩是弹性极限弯矩(屈服弯矩)的________倍。已知 $b=30\text{cm}$，$t=10\text{cm}$。
7. 极限弯矩 M_u 所在截面的中性轴是以截面的____________确定的。

图 13.23

三、判断题

1. 结构塑性分析适用于所有材料和全部工程结构。(　　)
2. 平面假设在塑性分析中不能使用。(　　)
3. 求极限荷载时出现塑性铰的数目与超静定次数一定相同。(　　)
4. 静定结构只要产生一个塑性铰即发生塑性破坏，n 次超静定结构一定要产生 $n+1$

个塑性铰才产生塑性破坏。(　　)

5. 结构某截面完全进入塑性状态后，该截面就像铰一样不能承受内力，处于这种情况下的截面称为塑性铰。(　　)

6. 理想弹塑性材料的杆件，截面应力全部达到屈服应力σ_s时，称此时的截面为弹塑性铰。(　　)

7. 有一个对称轴的截面的极限弯矩为$M_u=\sigma_s Aa/2$，其中A为截面面积，a为受拉区和受压区面积形心之间的距离，σ_s为材料的屈服极限。(　　)

8. 图13.24所示T形截面，其材料的屈服极限$\sigma_s=235\text{MPa}$，可算得其极限弯矩$M_u=17.86\text{kN}\cdot\text{m}$。(　　)

6cm
2cm
8cm
2cm

图 13.24

四、选择题

1. 塑性铰具有如下的性质(　　)。

A. 可以沿弯矩方向发生有限相对转角　　B. 沿弯矩增加方向有弹性刚度

C. 沿弯矩减少方向的弹性刚度为零　　D. 塑性铰和一般铰具有同样的性质

2. 塑性截面系数W_u和弹性截面系数W_e的关系为(　　)。

A. $W_e=W_u$　　B. $W_e\geqslant W_u$

C. $W_e\leqslant W_u$　　D. W_e可能大于，也可能小于W_u

3. 下列结论中正确的是(　　)。

A. 塑性截面系数与截面积成正比

B. 塑性铰不能承受反向荷载

C. 任意截面在形成塑性铰过程中的中性轴位置保持不变

D. 在极限状态下，截面的中性轴将截面积等分

4. 截面中性轴的位置从弹性阶段到塑性阶段保持不变的情况只存在(　　)。

A. Π形截面　　B. T形截面

C. 有一根对称轴并在对称平面作用横向荷载的截面

D. 双向对称截面

5. 超静定的梁和刚架，当变成破坏机构时，塑性铰的数目m与结构超静定次数n之间的关系为(　　)。

A. $m=n$　　B. $m>n$

C. $m<n$　　D. 取决于体系构造和承受荷载的情况

6. 图13.25所示两端固定梁在合力相同的不同荷载作用下，其极限荷载最小时的荷载情况是(　　)。

A. 均布荷载

B. 中点受一个集中力

C. 二等分段中点各受一个集中力(二力相等)

D. 三等分段中点各受一个集中力(三力相等)

7. 图13.26所示4种同材料、同截面形式的单跨梁中，其极限荷载值最大的为(　　)。

A. $M_{u1}>M_{u2}$　　B. $M_{u1}=M_{u2}$

C. $M_{u1}<M_{u2}$　　D. 不确定的

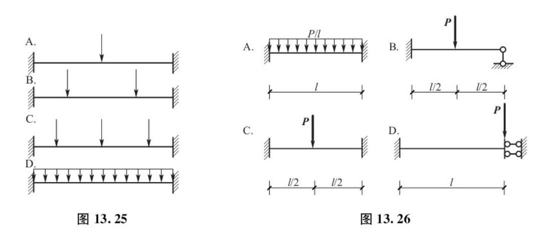


图 13.25　　图 13.26

8. 图 13.27 所示截面，其材料的屈服极限 $\sigma_s = 24\text{kN/cm}^2$，可算得极限弯矩 M_u 大小为(　　)。

A. 543.85kN·m　　B. 645.25kN·m

C. 762.50kN·m　　D. 867.25kN·m

9. 图 13.28 所示连续梁截面的极限弯矩为 M_u 极限荷载 F_u 为(　　)。

A. $2M_u/l$　　B. $2.5M_u/l$　　C. $4M_u/l$　　D. $6M_u/l$

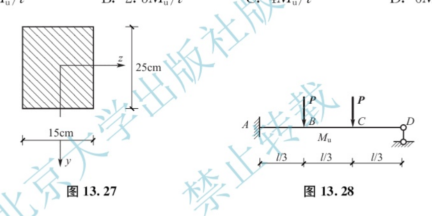


图 13.27　　图 13.28

五、计算题

1. 图 13.29 所示的超静定拉压杆结构，承受荷载 F 作用。若 3 个杆件的材料、截面、杆长均相同，屈服应力为 σ_s，试计算其塑性极限荷载 F_u。

2. 计算图 13.30 所示结构的极限荷载。拉杆 1 和拉杆 2 为理想弹塑性材料，其长度 l、横截面积 A、弹性模量 E 及屈服应力 σ_s 均相同。

3. 计算图 13.31 所示截面的极限弯矩，已知材料的屈服应力 $\sigma_s = 235\text{MPa}$。

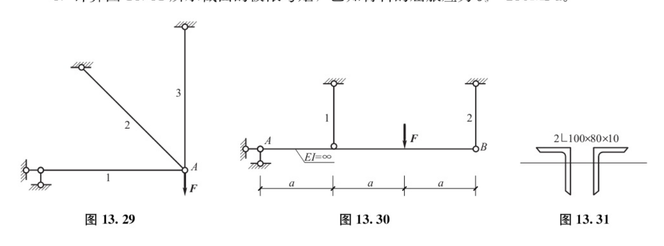


图 13.29　　图 13.30　　图 13.31

4. 计算图 13.32 所示简支梁的极限荷载。梁为理想弹塑性材料，屈服应力 $\sigma_s=235\text{MPa}$。

5. 计算图 13.33 所示连续梁的极限荷载。梁为理想弹塑性材料，极限弯矩为 M_u。

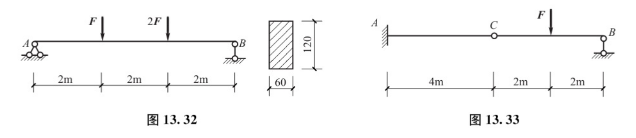


图 13.32　　　　图 13.33

6. 图 13.34 所示超静定梁，承受集中荷载 F 作用。已知梁的极限弯矩为 M_u。试求该荷载形式下的极限荷载值 F_u。

7. 图 13.35 所示超静定刚架，承受集中荷载 F 作用。已知各杆的长度均为 l，各杆的极限弯矩均为 M_u。试求该荷载形式下的极限荷载值 F_u。

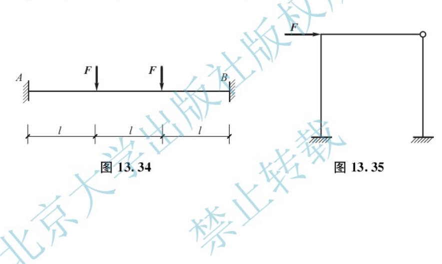


图 13.34　　　　图 13.35

部分习题参考答案

习　题　1

二、填空题

1. 杆件结构　薄壳结构　实体结构　平面结构　空间结构
2. 等截面直杆　变截面直杆　等截面或变截面的曲杆
3. 荷载作用在结构上的时间长短

三、判断题

1. √；　2. √　3. ×；4. ×；　5. ×；　6. ×；7. √

四、选择题

1. D；　2. C；　3. B

习　题　2

二、填空题

1. 铰结点　刚结点　复合结点
2. 2
3. 几何瞬变体系
4. 虚铰
5. 无穷大　不确定
6. 3
7. 几何不变　无　有
8. 几何可变
9. $W \leqslant 0$　三个
10. 5
11. 几何不变　4
12. $W \leqslant 0$　满足刚片相连接的规则
13. 无多余约束的几何不变
14. 无多余约束的几何不变

三、判断题

1. ×；　2. ×；　3. √；　4. √；　5. ×；　6. ×；　7. ×；
8. ×；　9. √；　10. ×；　11. ×；　12. ×；　13. ×；　14. √；
15. ×；　16. √；　17. √；　18. ×；　19. ×

四、选择题

1. D；　2. D；　3. A；　4. A；　5. C；　6. C；　7. A；　8. A；　9. C；
10. B；　11. A；　12. C；　13. C；　14. D；　15. B；　16. B；　17. C

五、分析题

图 2.49、图 2.51、图 2.53、图 2.54、图 2.55、图 2.56、图 2.57、图 2.59、

图2.61、图2.62、图2.66、图2.68、图2.69、图2.70为无多余约束的几何不变体系；图2.50、图2.52、图2.60、图2.71、图2.72为瞬变体系；图2.58为具有两个多余约束的几何不变体系；图2.63、图2.67为少一个联系的几何可变体系；图2.64、图2.65为具有一个多余约束的几何不变体系。

习　题　3

二、填空题

1. 静力平衡条件　多余
2. 截面法　静力平衡方程
3. 一侧　一侧　截面
4. 0　0
5. 20kN·m
6. 简支梁　悬臂梁　外伸梁
7. $\frac{dV(x)}{dx}=q(x)$　$\frac{dM(x)}{dx}=V(x)$　$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x)$
8. 剪力图　弯矩图
9. 2

三、判断题

1. √；　2. ×；　3. √；　4. √；　5. √；　6. ×；　7. ×

四、选择题

1. A；　2. B；　3. D；　4. A；　5. C；　6. D；　7. B；　8. A；
9. A；　10. B；　11. A；　12. B

五、计算题

1. (a) $V_D^L=4kN$，$M_D=16kN\cdot m$
   (b) $V_A=-43kN$，$M_A=309kN\cdot m$(右侧受拉)
   (c) $V_A^R=25kN$，$M_D=20kN\cdot m$
2. (a) $M_B=-40kN\cdot m$
   (b) $M_D=10kN\cdot m$
   (c) $M_D^R=-4kN\cdot m$
   (d) $M_{中}=-1kN\cdot m$
   (e) $M_C=\frac{1}{2}Pl$
   (f) $M_C=\frac{1}{4}Pl$
3. 略
4. (a) $M_A=-4kN\cdot m$，$V_A=3kN$；
   $M_B=-2kN\cdot m$，$V_B^R=4kN$
   (b) $M_D=5kN\cdot m$，$V_D=6.67kN$；
   $M_F=13.33kN\cdot m$，$V_F^L=13.33kN$
   (c) $M_B=4.33kN\cdot m$，$V_B^L=-2.92kN$；

$M_C=-16\text{kN}\cdot\text{m}$，$V_C^R=8\text{kN}$

(d) $M_A=-3\text{kN}\cdot\text{m}$，$V_A=2.33\text{kN}$；

$M_F=-1.67\text{kN}\cdot\text{m}$，$V_F^L=3.67\text{kN}$

5. (a) $M_B=2M$，$M_D=2M$

(b) $M_B=-10\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_C=-6\text{kN}\cdot\text{m}$

习　题　4

二、填空题

1. 20　右　0
2. 0　0　-2kN
3. 相等　弯矩
4. $2Pl$　左
5. $4\text{kN}\cdot\text{m}$　下
6. Pd　里
7. $0.5\text{kN}\cdot\text{m}$　下

三、判断题

1. ×；　2. ×；　3. ×；　4. ×；　5. ×；　6. √；　7. √

四、选择题

1. C；　2. C；　3. C；　4. C；　5. C；　6. B；　7. C；　8. D；
9. A；　10. B；　11. A；　12. B；　13. B；　14. C

五、计算题

1. (a) $M_{BC}=\frac{1}{2}qa^2$(上侧受拉)，$M_{BA}=\frac{1}{2}qa^2$(右侧受拉)，

$V_{BA}=-qa$，$N_{BC}=-qa$

(b) $M_{BA}=30\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)，$V_{BA}=0$，$N_{BA}=-100\text{kN}$

(c) $M_{BA}=2Pa$(右侧受拉)，$V_{BA}=0$，$N_{BA}=0$

(d) $M_{BA}=1.6\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$M_{AB}=8.35\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)

2. (a) $M_{CB}=80\text{kN}\cdot\text{m}$(下侧受拉)，$V_{CB}=20\text{kN}$，$N_{CA}=-20\text{kN}$

(b) $M_{CD}=280\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$M_{DC}=160\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，

$V_{CD}=30\text{kN}$，$N_{CD}=-80\text{kN}$

(c) $M_{ED}=120\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$M_{FB}=80\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)，

$V_{DE}=30\text{kN}$，$N_{DE}=-40\text{kN}$

(d) $M_{CB}=60\text{kN}\cdot\text{m}$(下侧受拉)，$V_{CB}=-8.75\text{kN}$，$N_{CA}=8.75\text{kN}$

3. (a) $M_{BC}=250\text{kN}\cdot\text{m}$(下侧受拉)，$M_{CA}=20\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)，

$V_{CB}=180\text{kN}$，$N_{CA}=-180\text{kN}$

(b) $M_{DC}=m$(下侧受拉)，$V_{DC}=-\frac{m}{a}$，$N_{DA}=\frac{m}{a}$

4. (a) $M_{DC}=20\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$V_{EC}=-20\text{kN}$，$N_{DA}=-20\text{kN}$

(b) $M_{EA}=40\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)，$V_{FB}=-6.67\text{kN}$，$N_{EC}=6.67\text{kN}$

(c) $M_{DE}=3P$(下侧受拉)，$V_{DE}=-\frac{P}{2}$，$N_{DE}=-\frac{P}{2}$

(d) $M_{DC}=14.83\text{kN}\cdot\text{m}$(下侧受拉)，$M_{EC}=12.84\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，
$V_{DA}=-0.35\text{kN}$，$N_{DA}=1.96\text{kN}$

6. (a) $M_{DC}=0$
(b) $M_{CA}=25\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)
(c) $M_{AB}=40\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)
(d) $M_{BA}=25\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)
(e) $M_{DA}=\frac{1}{2}Pa$(左侧受拉)
(f) $M_{DC}=\frac{1}{2}Pa$(上侧受拉)

7. (a) $M_{DC}=20\text{kN}\cdot\text{m}$(下侧受拉)
(b) $M_{DC}=80\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)，$M_{GF}=320\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)
(c) $M_{GD}=12\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)，$M_{EC}=12\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)
(d) $M_{DB}=0$，$M_{DF}=Pa$(下侧受拉)，$M_{HF}=2Pa$(上侧受拉)

8. 提示：两平行链杆处的剪力为零。

习　题　5

二、填空题

1. 曲线　水平推力
2. 水平推力
3. $-30°$　$\frac{qa}{4}(1-\sqrt{2})\left(-\frac{qa}{2}\right)\cos(-30°)-\left(\frac{qa}{2}\right)\sin(-30°)$
4. 84kN·m　上
5. 荷载作用情况
6. 无弯矩和剪力　轴力　均匀

三、判断题

1. √；　2. √；　3. √；　4. ×；　5. √；　6. √

四、选择题

1. C；　2. A；　3. D；　4. C；5. D；　6. B；　7. C；　8. A

五、计算题

1. (1) $Y_A=10\text{kN}(\uparrow)$，$Y_B=14\text{kN}(\uparrow)$，$H_A=H_B=H=12\text{kN}$
(2) $M_D=4\text{kN}\cdot\text{m}$，$V_{D左}=3.576\text{kN}$，$V_{D右}=-3.576\text{kN}$，$N_{D左}=15.198\text{kN}$，
$N_{D右}=11.622\text{kN}$；$M_E=4\text{kN}\cdot\text{m}$，$V_E=0$，$N_E=13.41\text{kN}$

2. $V_A=100\text{kN}(\uparrow)$，$H_A=H_B=H=50\text{kN}$，$M_D=-29\text{kN}\cdot\text{m}$，$V_D=18.3\text{kN}$，
$N_D=-68.3\text{kN}$

习　题　6

二、填空题

1. 简单桁架　联合桁架　复杂桁架
2. 结点　截面

3. 混合组成　轴力　弯矩　剪力

4. $-\sqrt{2}\frac{P}{4}=-0.3536P$　$\sqrt{2}\frac{P}{4}=0.3536P$

5. 0　P

6. 相等　相同

7. 15

8. 6

三、判断题

1. ×；　2. √；　3. ×；　4. √；　5. ×；　6. √；　7. ×；　8. ×；　9. √

四、选择题

1. C；　2. A；　3. D；　4. B；　5. C；　6. C；　7. A；　8. C；　9. A；
10. A；　11. D；　12. A；　13. D；　14. A；　15. B；　16. D；　17. C；
18. B；　19. D；　20. D；　21. C

五、计算分析题

1. (a) 简单桁架，有 4 根零杆
   (b) 联合桁架，有 10 根零杆
   (c) 简单桁架，有 15 根零杆
   (d) 简单桁架，有 5 根零杆
   (e) 联合桁架，有 8 根零杆
   (f) 复杂桁架，有 5 根零杆

2. (a) $N_{12}=\sqrt{2}P$，$N_{13}=-P$，$N_{23}=-P$，$N_{24}=P$，$N_{34}=\sqrt{2}P$，$N_{35}=-2P$
   (b) $N_{12}=N_{34}=N_{14}=-\frac{P}{2}$，$N_{26}=N_{36}=N_{35}=0$，$N_{15}=N_{45}=\frac{\sqrt{2}P}{2}$，$N_{56}=P$
   (c) $N_{AB}=-4\text{kN}$
   (d) $N_{DC}=-5\text{kN}$，$N_{AB}=4\text{kN}$，$N_{AC}=-15.65\text{kN}$

3. (a) $N_1=-8\text{kN}$，$N_2=5\text{kN}$，$N_3=4.12\text{kN}$
   (b) $N_1=-P$
   (c) $N_1=-\frac{3P}{4}$
   (d) $N_1=-\frac{10\sqrt{5}}{3}\text{kN}$，$N_2=0$，$N_3=-\frac{10\sqrt{2}}{3}\text{kN}$
   (e) $N_1=-2.5P$，$N_2=-\frac{5}{6}P$，$N_3=3P$
   (f) $N_1=20\text{kN}$，$N_2=0$，$N_3=0$

4. (a) $N_1=22.5\text{kN}$，$N_2=-45$，$N_3=37.5\text{kN}$
   (b) $N_1=-2.84\text{kN}$，$N_2=0$，$N_3=5\text{kN}$，$N_4=0$

5. (a) $N_{DE}=\frac{P}{2}$(拉)，$N_{DA}=\frac{\sqrt{2}P}{2}$(拉)，$N_{DF}=-\frac{P}{2}$(压)，$N_{EB}=\frac{\sqrt{2}P}{2}$(拉)，

   $N_{EG}=-\frac{P}{2}$(压)，$M_F=\frac{Pa}{4}$(下边受拉)，$V_{AF}=\frac{P}{4}$，$V_{FC}=-\frac{P}{4}$，

$M_G=\frac{Pa}{4}$（上边受拉），$V_{CG}=-\frac{P}{4}$，$V_{GB}=\frac{P}{4}$

（b）$M_D=120\text{kN}\cdot\text{m}$（左边受拉），$N_{CE}=-28.28\text{kN}$

习　题　7

二、填空题

1. 形状　位置　线　角
2. 0
3. $\frac{11ql^4}{24EI}$
4. 位移和变形　内力　位移　变形
5. 弯曲　剪切
6. 杆轴为直线　EI 为常量　M_P与$\overline{M}$两个弯矩图中至少有一个是直线图形
7. 平衡　弹性
8. A_ω与 y_C在杆件的同侧　在异侧
9. 虚设位移状态　虚设力系

三、判断题

1. √；　2. √；　3. √；　4. ×；　5. √；　6. ×；　7. √；
8. ×；　9. ×

四、选择题

1. C；　2. C；　3. C；　4. B；　5. C；　6. A；　7. B；　8. B；
9. C；　10. C；　11. D；　12. B；　13. B；　14. A；　15. A；
16. C；　17. D；　18. C；　19. C

五、计算题

1. $\Delta_{AV}=\frac{ql^4}{8EI}(\rightarrow)$，$\theta_A=\frac{ql^3}{6EI}(\curvearrowleft)$
2. $\Delta_{BH}=\frac{3ql^4}{8EI}(\rightarrow)$
3. $\Delta_C=1.72\text{mm}(\downarrow)$
4. $\Delta_{DH}=3.828\frac{pa}{EA}(\rightarrow)$
5. $\Delta_{BH}=\frac{PR^3}{2EI}(\rightarrow)$
6. $\Delta_{AV}=\frac{ql^4}{8EI}(\rightarrow)$，$\theta_A=\frac{ql^3}{6EI}(\curvearrowleft)$
7. （1）$\Delta_{V\max}=\frac{23Pl^3}{648EI}(\downarrow)$

（2）$\Delta_{CV}=\frac{680}{3EI}(\downarrow)$

（3）$\theta_B=\frac{19qa^3}{24EI}(\curvearrowleft)$

（4）$\Delta_{AH}=\frac{7qa^4}{EI}(\leftarrow)$，$\Delta_{DV}=\frac{161qa^4}{48EI}(\downarrow)$

(5) $\Delta_{CD}=\frac{11qa^4}{15EI}(\leftarrow\rightarrow)$

(6) $\Delta_{AV}=\frac{54}{EI}(\uparrow)$，$\Delta_{DV}=\frac{161qa^4}{48EI}$

8. $\Delta_{DV}=28\text{mm}(\downarrow)$

9. $\Delta_{CV}=13.2\text{mm}(\uparrow)$

10. $\Delta_{DH}=16.5\text{mm}(\rightarrow)$

11. (1) $\Delta_{BH}=10\text{mm}(\leftarrow)$；(2) $\Delta_{BH}=2.5\text{mm}(\rightarrow)$

12. $\Delta_{KV}=\Delta_y-3a\Delta_\varphi(\downarrow)$，$\Delta_{KH}=\Delta_H+a\Delta_\varphi(\leftarrow)$，$\Delta_{K\varphi}=\Delta_\varphi$

13. $\Delta_{DV}=3.3\text{mm}(\downarrow)$

习　题　8

二、填空题

1. 2次　1次　4次　5次　6次　12次　2次　5次　3次　5次

2. 基本体系中由于 $X_j=1$ 作用引起的沿 X_i 方向的位移　基本体系中由于荷载作用引起的沿 X_i 方向的位移

3. 正　正或负或零

4. 0.375Pa　上

5. 0.5Pl　内

三、判断题

1. ×；　2. √；　3. ×；　4. ×；　5. ×；　6. √；　7. ×；
8. ×；　9. ×；　10. ×；　11. ×；　12. √；　13. ×；
14. √；　15. √；　16. ×；　17. ×；　18 ×

四、选择题

1. C；　2. D；　3. A；　4. B；　5. C；　6. B；　7. B；　8. A；　9. A；　10. B

五、计算题

1. (a) $M_A=\frac{3}{16}Pl$(上侧受拉)

(b) $M_B=\frac{3}{32}Pl$　(上侧受拉)

(c) $M_A=\frac{1}{3}ql^2$(上侧受拉)，$M_B=\frac{1}{6}ql^2$(下侧受拉)

(d) $M_A=\frac{1}{8}Pl$(上侧受拉)，$M_B=\frac{1}{8}Pl$(上侧受拉)

2. (a) $M_{CA}=9\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)

(b) $M_{CA}=13.8\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)，　$M_{DB}=2.2\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)

(c) $M_{DB}=8.625\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)

(d) $M_{CA}=\frac{1}{14}ql^2$(左侧受拉)

(e) $M_{AD}=36.96\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)，$M_{BE}=104.46\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)

(f) $M_{DE}=0.852\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$M_{ED}=10.2\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)

3. (a) $M_{DE}=62.12$kN·m(上侧受拉)
 (b) $M_{AD}=49.04$kN·m(左侧受拉)，$M_{BE}=11.524$kN·m(左侧受拉)
4. (a) $N_{DE}=0.172P$，$N_{EC}=-0.586P$
 (b) $N_{BC}=0.896P$，$N_{AC}=0.147P$
5. (a) $M_{AC}=22.5$kN·m(左侧受拉)
 (b) $M_{BD}=92.4$kN·m(右侧受拉)
6. $N_{EF}=67.3$kN，$M_C=14.6$kN·m(上侧受拉)
7. $M_K=125.743$kN·m(下侧受拉)，$V_K=0.089$kN，$N_K=-111.623$kN
8. $H=0.46P$，$M_A=0.11PR$
9. (a) $M_{AC}=15.6$kN·m(左侧受拉)，$M_{CA}=9.38$kN·m(右侧受拉)
 (b) $M_{AC}=61.5$kN·m(左侧受拉)，$M_{BD}=32.3$kN·m(左侧受拉)
 (c) $M_{AC}=20.7$kN·m(左侧受拉)，$M_{CD}=22.8$kN·m(下侧受拉)
 (d) $M_{AB}=\dfrac{1}{24}qa^2$(下侧受拉)
 (e) $M_{DE}=0.039ql^2$(上侧受拉)，$M_{ED}=0.074ql^2$(上侧受拉)
 (f) $M_{AE}=\dfrac{1}{4}Ph$(左侧受拉)
 (g) $M_{AC}=9.27$kN·m(右侧受拉)，$M_{BD}=32.3$kN·m(左侧受拉)
 (h) 上下中点弯矩为$\dfrac{qR^2}{4}$(内侧受拉)
10. (a) $M_{CB}=\dfrac{480\alpha EI}{l}$(上侧受拉)
 (b) $\varphi_A=60\alpha$(顺时针转)
11. $M_A=\dfrac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$(上侧受拉)
12. (a) $M_{AB}=3\dfrac{EI}{l}\alpha$(下侧受拉)
 (b) $M_{AB}=4\dfrac{EI}{l}\alpha$(下侧受拉)
 (c) $M_{AB}=3\dfrac{EI}{l^2}\Delta$(上侧受拉)
 (d) $M_{AB}=6\dfrac{EI}{l^2}\Delta$(上侧受拉)
 (e) $M_{BC}=\dfrac{4EI}{3000\alpha}$(下侧受拉)

习 题 9

二、填空题

1. 变形条件
2. 也可 平衡
3. 线刚度 i 远端支承情况
4. 0 0

5. 0

6. 功的互等定理(或反力互等定理)

7. 静力平衡

8. 4　1　2　1　2　2　2　2

9. $n_\varphi=2,n_l=0$　$n_\varphi=1,n_l=2$　$n_\varphi=8,n_l=3$　$n_\varphi=1,n_l=1$
$n_\varphi=2,n_l=2$　$n_\varphi=2,n_l=1$　$n_\varphi=1,n_l=1$　$n_\varphi=1,n_l=0$

10. 反对称

11. 相反

三、判断题

1. ×；　2. ×；　3. √；　4. ×；　5. √；　6. ×；　7. ×；　8. √

四、选择题

1. D；　2. A；　3. D；　4. D；　5. B；　6. D；　7. C；　8. B；
9. B；　10. B；　11. C；　12. B；　13. A

五、计算分析题

1. (a) 3+1=4
   (b) 5+2=7
   (c) $\alpha\neq0$，1+1=2；$\alpha=0$，1+0=1
   (d) $\alpha\neq0$，6+4=10；$\alpha=0$，6+4=10
   (e) $EA\neq\infty$，6+3=8；$EA=\infty$，6+2=8
   (f) 4+2=6
   (g) 2+2=4

2. (a) $\overline{M}_{CB}=3i$，$M^F_{CB}=\dfrac{3}{16}ql^2$
   (b) $\overline{M}_{BA}=\dfrac{3}{4}EI$，$M^F_{BA}=5\text{kN}\cdot\text{m}$
   (c) $\overline{M}_{CD}=\dfrac{2EI}{l}$
   (d) $\theta_A=1$，$\overline{M}_{FB}=0$；　$\theta_B=1$，$\overline{M}_{FB}=-i$，$M^F_{FB}=\dfrac{1}{8}ql^2$

3. (a) $M_{DC}=41.5\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{CD}=-6.92\text{kN}\cdot\text{m}$
   (b) $M_{BA}=45.63\text{kN}\cdot\text{m}$

4. (a) $M_{AB}=-\dfrac{41}{280}Pl$，$M_{BC}=-\dfrac{11}{280}Pl$
   (b) $M_{BC}=-54.3\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{CB}=70.3\text{kN}\cdot\text{m}$

5. (a) $M_{AD}=-\dfrac{11ql^2}{56}$，$M_{AEB}=-\dfrac{3ql^2}{28}$
   (b) $M_{AD}=-84.2\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{EB}=-70\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{ED}=35.1\text{kN}\cdot\text{m}$
   (c) $M_{AC}=-10.4\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{BD}=-5.65\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{CE}=7.53\text{kN}\cdot\text{m}$
   (d) $M_{DG}=33.3\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{AD}=53.33\text{kN}\cdot\text{m}$

6. (a) $M_{AC}=-225\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{BD}=-135\text{kN}\cdot\text{m}$
   (b) $M_{CE}=-40\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{EC}=70\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{EF}=-57.39\text{kN}\cdot\text{m}$

7. (a) $M_{AD}=\frac{1}{48}ql^2$，$M_{DE}=-\frac{1}{24}ql^2$

(b) $M_{DE}=0$，$M_{ED}=180\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{EC}=-360\text{kN}\cdot\text{m}$

(c) $M_{EF}=-57.39\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{AC}=-5.22\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{CE}=20.87\text{kN}\cdot\text{m}$

(d) $M_{AC}=-171.4\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{CA}=-128.6\text{kN}\cdot\text{m}$

习　题　10

二、填空题

1. 固定　固端弯矩　放松　不平衡　固端弯矩　分配弯矩　传递弯矩
2. 线刚度　支承情况
3. 无侧移(或无结点线位移)
4. 当近端转动时远端弯矩与近端弯矩的比值　0.5　−1
5. 0　1　0.2
6. 1　0.385

三、判断题

1. √； 2. ×； 3. √； 4. √； 5. √； 6. √； 7. ×； 8. √；
9. √； 10. √； 11. √

四、选择题

1. C； 2. B； 3. D； 4. C； 5. B； 6. B； 7. D； 8. B

五、计算题

1. (a) $M_{BA}=35\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$R_B=27.5\text{kN}(\uparrow)$

(b) $M_A=6.08\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$M_{CB}=61.14\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$R_B=73.89\text{kN}(\uparrow)$

(c) $M_{CB}=52.76\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$R_B=89.7\text{kN}(\uparrow)$

2. (a) $M_{BA}=14.7\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$M_{CB}=16.8\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)

(b) $M_A=3.33\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)，$M_{CD}=33.33\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)

3. $M_{JK}=128.3\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$M_{LK}=176.8\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，
$M_{AD}=20.8\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)，$M_{HG}=161.4\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)

4. $M_{KJ}=148.6\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$M_{HG}=190.3\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，
$M_{AD}=33.4\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)，$M_{EB}=16.4\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)

5. $M_{AD}=39\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)，$M_{GJ}=11.25\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)，
$M_{KJ}=5.06\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$M_{EF}=29.25\text{kN}\cdot\text{m}$(下侧受拉)

6. $M_{AD}=31.88\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)，$M_{GJ}=7.08\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)，
$M_{KJ}=6.53\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)，$M_{EF}=38.82\text{kN}\cdot\text{m}$(下侧受拉)

7. $V_A=V_C=2.75\text{kN}$，$V_B=2.92\text{kN}$

8. 略

习　题　11

二、填空题

1. $Z=P_1\cdot y_1+P_2\cdot y_2+\cdots+P_n\cdot y_n=\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot y_i$

2. 平衡方程　位移图

3. 梁中点　$\frac{l}{2}-\frac{a}{2}$

4. 静力法　机动法

5. 基本部分　附属部分

6. R_B　C　反力 R_B

7. $B_{左}$　剪力

8. M_K　D　M_K

9. 2m

10. 移动　绝对最大

11. 虚位移

12. 500　160

13. 3.8

三、判断题

1. ×；　2. √；　3. √；　4. ×；　5. ×；　6. √；　7. ×；　8. √；
9. √；　10. √；　11. √；　12. √；　13. ×；　14. ×；　15. ×；　16. √

四、选择题

1. A；　2. C；　3. D；　4. B；　5. C；　6. D；　7. C；　8. A；　9. C；
10. A；　11. D；　12. D；　13. C

五、计算题

1. (a) $R_A=1$，$M_A=x$，$M_C=\begin{cases}0, & (0<x\leqslant 2)\\ -(x-2) & (x\geqslant 2)\end{cases}$，$V_C=\begin{cases}0, & (0<x\leqslant 2)\\ 1 & (2<x\leqslant 3)\end{cases}$

(b) $R_B=1$(B 点的值)，$M_C=1$(C 点的值)，$V_C=-\frac{1}{2}$(C 左的值)，$M_B=-2$(D 点的值)，$V_B^L=-1$(B 左的值)，$V_B^R=+1$(B 右的值)

(c) $R_A=R_A^0$，$R_B=R_B^0$，$M_C=M_C^0$，$V_C=V_C^0\cos\alpha$，$N_C=-V_C^0\sin\alpha$

注：上标加“0”者为平梁有关量的值。

(d) $V_C^L=-1$(C 左的值)，$M_C=b$(C 点的值)

2. (a) $M_C=\frac{2}{3}$m(D 点的值)，$V_C=\frac{2}{3}$(D 点的值)

(b) $R_A=\frac{10}{9}$(F 点的值)，$M_C=\frac{4}{3}$m(G 点的值)，$V_C=-\frac{2}{9}$(G 点的值)，

$V_D^L=-\frac{2}{9}$(G 点的值)，$V_D^R=-\frac{5}{9}$(D 点的值)

3. (a) $N_1=\frac{7}{11}$(C 点的值)，$N_2=\frac{12}{11}$(E 点的值)，$N_3=\frac{32}{33}$(D 点的值)，

$N_4=-\frac{34}{33}$(C 点的值)，$N_5=\frac{136}{165}$(D 点的值)，$N_6=-\frac{34}{55}$(E 点的值)，

$N_7=1$(G 点的值)

(b) $N_1=1$(D 点的值)，$N_2=-\frac{\sqrt{13}}{3}$(D 点的值)，$N_3=1$(E 点的值)

(c) $N_1=\frac{3}{2}$(C 点的值)，$N_2=1$(C 点的值)，$N_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$(C 点的值)，

$N_4=\sqrt{2}$(C 点的值)

4. (a) $R_C=\frac{4}{3}\mathrm{m}$($B$ 点的值)，$M_H=-\frac{2}{3}\mathrm{m}$($B$ 点的值)，$V_H=\frac{1}{3}$(B 点的值)，

$V_G=0$(B 点的值)

(b) $R_A=-\frac{1.5}{4}$(C 点的值)，$R_B=\frac{5.5}{4}$(C 点的值)，$M_E=-1\mathrm{m}$(D 点的值)，

$V_E^{\mathrm{L}}=-1$(D 点的值)，$V_E^{\mathrm{R}}=\frac{1}{3}$(以上为 D 点的值)

(c) $M_A=-3\mathrm{m}$(B 点的值)，$V_C=-1$(C 点的值)，$M_D=-2\mathrm{m}$(C 点的值)，

$M_K=-1\mathrm{m}$(C 点的值)，$V_K=-\frac{1}{2}$(C 点的值)

(d) $M_K=\frac{2}{3}\mathrm{m}$ (K 点的值)，$V_K=-\frac{1}{3}$(K 左的值)，$V_C^{\mathrm{R}}=1$(C 右的值)，

$M_D=1\mathrm{m}$(D 点的值)

5. (a) $M_E=55\mathrm{kN\cdot m}$，$V_D^{\mathrm{L}}=23.75\mathrm{kN}$

(b) $V_C=7.15\mathrm{kN}$，$M_C=6.8\mathrm{kN\cdot m}$

(c) $V_C=70\mathrm{kN}$，$M_C=80\mathrm{kN\cdot m}$

(d) $R_C=140\mathrm{kN}(\uparrow)$，$M_E=40\mathrm{kN\cdot m}$，$V_C^{\mathrm{L}}=-60\mathrm{kN}$

6. (a) $M_{C\max}=242.5\mathrm{kN\cdot m}$，$V_{C\max}=80.83\mathrm{kN}$，$V_{C\min}=-9.17\mathrm{kN}$

(b) $M_{C\max}=1912.21\mathrm{kN\cdot m}$，$V_{C\max}=637.43\mathrm{kN}$，$V_{C\min}=-81.13\mathrm{kN}$

7. $M_{C\max}=314.31\mathrm{kN\cdot m}$，$V_{C\max}=104.8\mathrm{kN}$，$V_{C\min}=-27.31\mathrm{kN}$

8. $R_{B\max}=237\mathrm{kN}$

9. $M_{\max}=426.67\mathrm{kN\cdot m}$

10. 绝对最大弯矩为 355.6kN·m，跨中最大弯矩为 350kN·m

11. 略

习　题　12

二、填空题

1. 3；　3；　2；　1；　2；　1；　1；　1

2. 越大

3. 振幅　频率

4. $[K]=[\delta]^{-1}$

5. −0.25

三、判断题

1. ×；　2. ×；　3. √；　4. ×；　5. ×；　6. ×；　7. √；　8. ×；
9. √；　10. ×

四、选择题

1. D；　2. C；　3. B；　4. B；　5. A；　6. B；　7. B；　8. C

五、计算题

1. (a) $\omega=\sqrt{\frac{48EI}{5ml^3}}$

   (b) $\omega=\sqrt{\frac{60EI}{5ml^3}}$

2. $\omega=\sqrt{\frac{6EI}{mh^3}}$

3. $\omega=\sqrt{\frac{1536EI}{23ml^3}}$

4. $\omega=\sqrt{\frac{3EI}{mh^2l}}$

5. $y_{max}=1\text{mm}$，$v_{max}=41.75\text{mm/s}$，$a_{max}=1743\text{mm/s}^2$

6. $c=401.96\text{kg/s}$，$y_5=0.24\text{cm}$

7. (1) $y_{max}=7.88\text{mm}$，$M_A=-42.2\text{kN}\cdot\text{m}$；

   (2) $y_{max}=6.16\text{mm}$，$M_A=-36.4\text{kN}\cdot\text{m}$

8. $\omega=\sqrt{\frac{16k}{33m}}$

9. $y_{max}=-0.0884\text{cm}$(与 F 方向相反)，$M_{max}=0.52\text{kN}\cdot\text{m}$

10. (a) $\omega_1=0.931\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$，$\omega_2=2.35\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$，$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=-\frac{1}{0.306}$，$\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=\frac{1}{1.638}$

    (b) $\omega_1=1.928\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$，$\omega_2=3.327\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$，$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=-\frac{1}{1.592}$，$\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=\frac{1}{0.314}$

11. $\omega_1=134.16\text{s}^{-1}$，$\omega_2=202.90\text{s}^{-1}$

12. $\omega_1=3.028\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$，$\omega_2=7.927\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$，$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{1}{1.618}$，$\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=-\frac{1}{0.618}$

13. $A_1=0.0316\frac{Fl^3}{EI}$，$A_2=0.099\frac{Fl^3}{EI}$(与 A_1 方向相反)，$M_{1max}=0.299Fl$

14. $A_1=-0.202\text{mm}$，$A_2=-0.206\text{mm}$，$M_A=6.063\text{kN}\cdot\text{m}$

15. 同 14 题答案

16. $\omega=\frac{15.45}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}}$

17. 假设 $y(x)=a\sin\frac{\pi x}{l}$时，$\omega=\sqrt{\frac{\frac{\pi^4 EI}{2l^3}}{\frac{\overline{m}l}{2}+M}}$

18. $\omega=\frac{2.21}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}}$

习　题　13

二、填空题

1. 单向　弯矩增大
2. 1　2　不能
3. 弹性阶段　弹塑性阶段　塑性流动阶段
4. 不超过
5. 丧失承载能力
6. 6.9175
7. 上下面积相等

三、判断题

1. ×；　2. ×；　3. ×；　4. ×；　5. ×；　6. ×；　7. √；　8. ×

四、选择题

1. A；　2. B；　3. D；　4. D；　5. D；　6. B；　7. A；　8. A；　9. C

五、计算题

1. $F_u = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sigma_s A$
2. $F_u = 2\sigma_s A$
3. $M_u = 105.4\text{kN}\cdot\text{m}$
4. $F_u = 11.34\text{kN}$
5. $F_u = \frac{M_u}{2}$
6. $F_u = \frac{2M_u}{l}$
7. $F_u = \frac{3M_u}{l}$

参考文献

[1] 龙驭球，包世华．结构力学 [M]．北京：高等教育出版社，2008.
[2] 李廉锟．结构力学 [M]．北京：高等教育出版社，2011.
[3] 李家宝．结构力学 [M]．北京：高等教育出版社，2004.
[4] 彭俊生，罗永坤．结构力学指导型习题册 [M]．成都：西南交通大学出版社，2001.
[5] 老亮．材料力学史漫话 [M]．北京：高等教育出版社，1993.
[6] 于玲玲．结构力学 [M]．北京：中国电力出版社，2009.
[7] 金圣才．注册结构工程师基础考试过关必做 1500 题 [M]．北京：中国石化出版社，2009.
[8] 卢存恕，周周，范国庆．建筑力学(上册) [M]．长春：吉林大学出版社，1996.
[9] 卢存恕，吴富英，常伏德．建筑力学(下册) [M]．长春：吉林大学出版社，1996.